複素関数・同演習 第 13 回
～冪級数 (5) Weierstrass の M-test, 冪級数の項別微分定理～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 10 日, 2026 年 11 月 23 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 冪級数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.3 一様収束 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.3.4 一様収束の性質 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.3.5 Weierstrass の M test ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
3.3.6 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する ・・・・・・・・・・・・ 5
3.4 冪級数の項別微分 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
3.4.1 冪級数の項別微分定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
参考文献 ・・ 13

0 本日の内容・連絡事項

- 先週はせわしくやってすみません (講義が 1 回しかなかったので、お急ぎモードでした)。
- 宿題 3,4 のフィードバック準備作業中です (遅れていてすみません)。

3　冪級数 (続き)

3.3　一様収束 (続き)

3.3.4　一様収束の性質 (続き)

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは 3 つ述べるが、最初の 2 つが関数論で重要である。(3 つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

Cf.　絶対収束する級数では、和を取る順序を変更しても和は変わらない、という定理など、色々と便利なことが成り立つ。

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

(1)　$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。

証明　$x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

すると $|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{x'\in\Omega} |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに f は x_0 で連続である。　□

(2)　一様収束するならば項別積分出来る、すなわち lim と $\int$ の順序交換出来る。

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \quad \left(\text{i.e. } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \right).$$

ただし、a と b は実数である $(-\infty, \infty$ ではない$)$ と仮定している。

証明　(1) より、f は連続であることに注意しよう。$n \to \infty$ のとき

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$= \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \int_a^b dx$$
$$= (b-a) \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

であるから、$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$ □

2026/11/4 の講義はこの辺りまででした。2026/11/10 の講義はこの辺から始まります。

(3)　各 n について f_n が C^1 級で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束し、$\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、f も C^1 級で $f' = g$. すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

証明　微積分の基本定理により、任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

$n \to \infty$ とすると (f_n' が g に一様収束するので、(2) を使って)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

g は連続であるので ($\because$ 連続関数列 $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様収束極限)、右辺は微分可能で、微分係数は $g(x)$.pp ゆえに f も微分可能で $f'(x) = g(x)$. これは連続であるから f は C^1 級である。 □

(この定理は、定理そのものよりも、証明の方が覚えやすいかもしれない。)

(実関数列の一様収束について説明したわけだが)
複素関数ではどうなるだろうか？

(1)「一様収束する連続関数列の極限は連続」…まったく同様に証明できる。
系として冪級数の和は収束円内で連続である (後述)。

(2)「一様収束するならば項別積分可能」…まだ複素線積分を定義していない訳であるが、まったく同様に証明できる。

(3) 実は**もっと本質的に強い定理**がある。

(3 改)　「各 f_n が正則で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に広義一様収束するならば、f は正則で $f' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$」

(このことの証明には、Cauchy の積分公式が必要で、証明出来るのはずっと後になる。それまで待てないので、冪級数については、もっと直接的に証明することにする。) ということで、関数論のテキストでは、上の (3) はスルーするのが普通である。

3.3.5 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上？) は次の定理を用いる。

定理 3.26 (Weierstrass の M-test)**.** Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の複素数値関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon \Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$
(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は一様収束するし (ゆえに項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は絶対収束する (ゆえに和を取る順序が変えられる)。

証明 (ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z):=\sum_{k=1}^{n}a_k(z),\quad S_n(z):=\sum_{k=1}^{n}|a_k(z)|,\quad T_n:=\sum_{k=1}^{n}M_k$$

とおく。任意の $z\in\Omega$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*)\qquad |s_n(z)-s_m(z)|\le|S_n(z)-S_m(z)|\le|T_n-T_m|$$

$n>m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z)-s_m(z)|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(z)-\sum_{k=1}^{m}a_k(z)\right|=\left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k(z)\right|\le\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)|=\sum_{k=1}^{n}|a_k(z)|-\sum_{k=1}^{m}|a_k(z)|=S_n(z)-S_m(z)=|S_n(z)-S_m(z)|,$$
$$\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)|\le\sum_{k=m+1}^{n}M_k=\sum_{k=1}^{n}M_k-\sum_{k=1}^{m}M_k=T_n-T_m=|T_n-T_m|.$$

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z):=\lim_{n\to\infty}s_n(z),\quad S(z):=\lim_{n\to\infty}S_n(z)\quad(z\in\Omega),$$
$$T:=\lim_{n\to\infty}T_n$$

とおく。

(再掲 $*$)　　$|s_n(z)-s_m(z)| \le |S_n(z)-S_m(z)| \le |T_n-T_m|$

で $m \to \infty$ とすると

$$(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n(z)-s(z)| \le |S_n(z)-S(z)| \le |T_n-T|\,.$$

$z \in \Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z \in \Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z\in\Omega} |s_n(z)-s(z)| \le \sup_{z\in\Omega} |S_n(z)-S(z)| \le |T_n-T|\,.$$

$n \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は S に、$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は s に、それぞれ Ω で一様収束する。 □

注意 3.27 (一様収束のための Cauchy の条件). この Weierstrass の M-test という定理は、関数項級数に関する命題であるが、関数列に関する命題がある (例えば田島 [1] §6.3 定理 50)。

> 集合 Ω 上の関数列 $\{f_n\}$ が Ω で一様収束するためには、次のコーシーの条件を満たすことが必要十分である.
>
> $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \ge N) \quad |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon.$$

この定理の条件を一様収束のための Cauchy の条件という。

実際にこの条件が成り立つことを確認するにはどうすれば良いかは、考えどころであるが、Weierstrass の M-test はそれに対する処方箋「うまい $\{M_n\}$ を見つけられれば OK」を与えているわけである。 □

3.3.6 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

> **定理 3.28** (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する). $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\ge 0}$ は複素数列, $0 \le \rho \le +\infty$ とする。冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R\}\,, \quad \overline{D}(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \le R\}\,.$$

注意 3.29 (広義一様収束). 「トポロジー」などで、コンパクト集合の概念を知っている人に。上の定理から「収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束する」ことが導かれる。このことを「$D(c;\rho)$ で**広義一様収束**する (uniformly convergent on every compact set in $D(c;\rho)$)」という。この概念はとても重要であるが、この授業では上の定理

の形で満足しておく (冪級数とその親戚しか出て来ないので、上の定理で何とかなる)。

□

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$M_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n (z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M\left(\frac{R}{r}\right)^n = M_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{M}{1 - R/r} \quad (\text{収束}).$$

Weierstrass の M-test (定理 3.26) によって、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は、$\overline{D}(c;R)$ で一様に絶対収束する。

□

3.4　冪級数の項別微分

3.4.1　冪級数の項別微分定理

次の定理は特に重要である。

定理 3.30 (冪級数の項別微分定理, Abel)**.** 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、和で定義される関数 f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

微分した結果が、やはり冪級数で、その収束半径が元と一致していることに注目しよう。そのことから、収束冪級数は収束円の内部で何回でも微分できることが分かる。

証明　$c = 0$ として証明すれば良い。$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと

まず $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を注意しておく。

(実際 $b_n := \sqrt[n]{n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき $\log b_n = \log\left(n^{1/n}\right) = \frac{\log n}{n} \to 0$ であるから、$b_n = e^{\log b_n} \to e^0 = 1$.)

このことから $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が導かれる。実際、次の (a), (b) による (講義ではここの説明はスキップした)。

(a) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{n}\geq 1$ であるから、$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}\geq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

(b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある自然数 N が存在して、任意の自然数 $n\geq N$ に対して $\sqrt[n]{n}\leq 1+\varepsilon$ となる。ゆえに $\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n\,|a_n|}\leq(1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. ε は任意だから $\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n\,|a_n|}\leq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^n$ $(=zg(z))$ の収束半径と同じであるので Cauhy-Hadamard の公式から

$$g(z)\text{ の収束半径}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\rho.$$

第 2 段 $f'=g$ であること　$0<R<\rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0;R)$ で正則で、$f'=g$ であることを示せば良い。

ε を任意の正数とする。($\sum_n na_nz^{n-1}$ が $z=R$ で絶対収束ゆえ) ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$(\star)\qquad\sum_{n=N+1}^{\infty}n\,|a_n|\,R^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$z\in D(0;R)$, $h\neq 0$, $z+h\in D(0;R)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|&=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\left((z+h)^n-z^n\right)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|\\&\leq\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right)\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}\right|\\&\quad+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|.\end{aligned}$$

右辺第 1 項は、$(z^n)'=nz^{n-1}$ より、$|h|$ が十分小さければ $\frac{\varepsilon}{3}$ より小さい。

右辺第 3 項については (三角不等式, $|z|<R$, $(\star)$ により)

$$\text{右辺第 3 項}\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|na_nz^{n-1}\right|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}n\,|a_n|\,R^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 2 項については (ここがこの定理の証明で一番微妙なところである)

$$\begin{aligned}|(z+h)^n-z^n|&=\left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1}+(z+h)^{n-2}z+\cdots+z^{n-1}\right)\right|\\&\leq|h|\left(|z+h|^{n-1}+|z+h|^{n-2}\,|z|+\cdots+|z|^{n-1}\right)\\&\leq|h|\left(nR^{n-1}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\text{右辺第 2 項}\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\,\frac{|(z+h)^n-z^n|}{|h|}\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}n\,|a_n|\,R^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

以上より、$|h|$ が十分小さければ $\left|\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| < \varepsilon$. ゆえに $f'(z) = g(z)$. □

2026/11/10 の講義はここまでです。証明わかりにくいので、時間 (40 分近い) を食いました。

注意 3.31 (上の証明を振り返る (講義ではスキップする)). 定理 3.30 の証明は、非常に難しいわけではないが、簡単ではない。極限の定義を導入した Cauchy は色々な定理を証明したが、この定理の証明は間違えた、Abel が初めて正しく証明した、と読んだことがある (そのうち確認したいと思っている)。

基本的な定理なので、身の回りのテキストの多くに証明が書かれているが、細部には相違がある。その中で分かりやすいと思われるものを採用した。g の冪級数が一様収束であることを使っていることから (実はまだ一様収束の概念がはっきり認識される前で、これは先駆的な結果と言えるのだろう)、右辺第 3 項の不等式評価が得られることは分かるが、右辺第 2 項の不等式評価をどう理解すると良いだろうか。

もっと分かりやすい証明はないか考えている。(線積分を用いるというアイディアはあるが、採用するには、講義内容を大幅に入れ替える必要があって躊躇している, 桂田 [2] の付録 A.6 に書いておいた)。 □

上の定理は $\rho = 0$ である場合を除いていないが、$\rho > 0$ の場合のみ考えることが多い (当たり前であろう)。

収束半径が正である (つまり 0 でない) 冪級数を収束冪級数と呼ぶ。

系 3.32 (収束冪級数は Taylor 展開である). 収束冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の定める関数 f は、収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が c 中心の収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それはその関数の c における Taylor 展開に一致する。

証明 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_k (z-c)^{n-k}.$$

$z = c$ を代入すると、$n = k$ の項のみ残って

$$f^{(k)}(c) = k(k-1)\cdots 2\cdot 1 \cdot a_k = k! a_k.$$

ゆえに $a_k = f^{(k)}(c)/k!$. □

系 3.33 (収束冪級数は原始関数を持つ). 収束冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F' = f$ が成り立つ。

証明 $F(z)$ を定義する冪級数を項別微分した冪級数は、$f(z)$ を定義する冪級に等しい。

$F(z)$ を定義する冪級数の収束半径は $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}}$ である。これは $f(z)$ の冪級数の収束半径 $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ に等しい ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ であるから)。

項別微分すると $f(z)$ の冪級数展開になることが確認できるので、$F' = f$. □

3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を収束冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、f が有理関数の場合に、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

もう一つの鍵は、**有理式の部分分数分解**である。

例 3.34 (基本). 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散であるから、$\rho = 1$.

これが $\dfrac{1}{1-z}$ の (0 における, 0 のまわりの) Taylor 展開に他ならない。 □

$\dfrac{1}{z+a}$ を 0 の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 3.35.

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

一般化しておくと: $a \neq 0$ であれば

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\rho = |a|$. 収束円は $D(0;|a|)$. □

$\dfrac{1}{z+a}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 3.36. $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad\Leftrightarrow\quad \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-1| < 4.$$

ゆえに $\rho = 4$, 収束円は $D(1;4)$. □

例 3.37. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

(♯) $$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

これは公比 $-z^2$ の等比数列であるから、

$$\text{収束する} \quad\Leftrightarrow\quad \left|-z^2\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|^2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z| < 1.$$

$f(z)$ は、

$$a_n := \begin{cases} (-1)^k & (n \text{ が偶数のとき、} n = 2k \text{ とおくと}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せるので冪級数であり、$\rho = 1$.

別解 こういうやり方もある。

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$
$$= -\frac{i}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-i)^{n+1}}\right) \qquad \left(\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} \text{ を使った}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n + (-i)^n\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2}i^n z^n.$$

ここで止めても良いだろう。以下は念のための確認である。

n が奇数のとき、$(-1)^n + 1 = 0$. $n = 2k$ のとき $i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, $(-1)^n + 1$=2 であるから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \quad ((\sharp) \text{ と一致する}).$$

□

$\dfrac{1}{(z+a)^n}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$ とする。

例 3.38. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ を 0 の周りで冪級数展開してみよう。

まず、分母の冪の指数が 1 の場合 $(\dfrac{1}{z-1})$ は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

$$\text{ゆえに} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 3.33 を使う)。

例 3.39. $f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答)　$f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

これから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C \quad \text{(収束半径は 1, } C \text{ は積分定数)}.$$

$f(0) = 0$ より $C = 0$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.$$

□

例 3.40. (辻・小松 [3] から拝借)

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$$

を 0 のまわりで冪級数展開 (Taylor 展開) してみよう。

$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z + 6$ で割ると、商 $z + 2$, 余り $3z - 7$ であるから、

$$f(z) = \frac{(z+2)(z^2 - 5z + 6) + 3z - 7}{z^2 - 5z + 6} = z + 2 + \frac{3z - 7}{z^2 - 5z + 6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できる。$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z - 7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z)$, $q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z)$, $B(z)$ が存在する。

$\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、$\deg A(z) < \deg p(z)$, $\deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z)$, $B(z)$ が存在する。 (左辺が真分数式ならば、右辺も真分数式にできる。)

$A = 1$, $B = 2$ と求まる。ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \qquad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n \quad (\text{少なくとも } |z| < 2 \text{ で収束}). \end{aligned}$$

収束半径は 2 である。これは $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+2}}} = 2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることからも分かる (「収束半径が ρ_1, ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$ の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する)。 □

以上より、**有理関数は、部分分数分解が求まれば、容易に冪級数展開できることが分かる**。

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出してまとめた。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

「c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z) = z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

の形のままでは、a_n が何か、すぐには分からない。

$$f(z) = \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n$$

と整理してあれば一目瞭然である。つまり

$$a_0 = \frac{5}{6}, \quad a_1 = \frac{19}{36}, \quad a_n = -\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) \quad (n \geq 2). \quad \square$$

参考文献

[1] 田島一郎：解析入門, 岩波書店 (1981/1/20), 1 変数の微積分に現れる解析学をていねいに解説してある。 分かりやすいという評判がある。

[2] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).

[3] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満（ゆうじょうぼうずいまん）、 水本久夫。