複素関数・同演習 第 12 回
～冪級数 (4) 一様収束～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 4 日, 2026 年 11 月 4 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 冪級数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.2 収束円 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.2.5 例 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.3 一様収束 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.3.0 目的の説明: 項別積分, 項別微分 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.3.1 半分スルーして良いイントロ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
3.3.2 各点収束, 一様収束の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
3.3.3 例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
3.3.4 一様収束の性質 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
3.3.5 Weierstrass の M test ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
3.3.6 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する ・・・・・・・・・・・・・ 9
3.4 冪級数の項別微分 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
3.4.1 冪級数の項別微分定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 12
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 16

0 本日の内容・連絡事項

- 今週は 1 回しかないので、駆け足モードです。
- 出欠は出席票の提出で行います。
- 宿題 3,4 のフィードバック準備作業中です (遅れていてすみません)。宿題 4 について

気づいたことを解答 PDF に書いておきましたが、時間に余裕があれば授業中にコメントするかも。

- 宿題 6 を出します。

3 冪級数 (続き)

3.2 収束円 (続き)

3.2.5 例 (続き)

宿題 5(2)(e) のような問題の解き方を説明していなかった。遅ればせながら。

例 3.1 (ratio test の使えない例). $\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!} = z^1 + z^2 + z^6 + z^{24} + z^{120} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N})\ n = k! \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ であるから冪級数である。ratio test は使えそうにない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n (z-c)^n| \leq |z|^n$ であり、$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because n$ がある自然数 k の階乗に等しいとき $|a_n (z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は発散する。

ゆえにこの冪級数の収束半径は 1. □

別解 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1 = 1$ であるから Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$. □

3.3 一様収束

3.3.0 目的の説明: 項別積分, 項別微分

簡単のため (グラフが思い浮かべられるように)、まず $\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\,dx$ ということ。

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} a_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b a_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

であるから。

一方

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり lim と微分の順序交換)

注　級数の場合は $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

項別積分・項別微分がしたいが、単なる各点収束では実は不十分。**一様収束ならば必ず出来る。**

3.3.1　半分スルーして良いイントロ

このスライドはスルー可能である (むしろ冪級数の最後に「後回し」した方が良いかも)。

(参考) 関数論である程度話が進むと、「**広義一様収束** (まだ紹介していない) が便利」と分かって、冪級数の項別積分、項別微分も、次のように理解できる。

(a) 冪級数は収束円で広義一様収束する。— 比較的簡単

(b) 正則関数列が広義一様収束すれば、(線積分においても) 項別積分出来る。— 比較的簡単

(c) 正則関数列が広義一様収束すれば、極限関数は正則で、項別微分も出来る。— 証明には Cauchy の積分公式が必要

しかし Cauchy の積分公式の証明が出来るのはずっと先であるし、初学者にいきなり「広義一様収束」はやや難しいと思われるので、ここでは次のように話を進める。

(i) 冪級数は、収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ で一様収束する。
(一般論により、一様収束するならば極限は連続で、項別積分出来る。)

(ii)「冪級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で何回でも項別微分できる」を直接証明する。

(余談: Fourier 解析でも、各点収束、一様収束、L^2 収束、と色々な収束が出て来て、特に L^2 収束がかなり有効である。関数論では、広義一様収束が有効である。)

3.3.2　各点収束, 一様収束の定義

定義 3.2 (各点収束, 一様収束). Ω は空でない集合、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各 n に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ (Ω 上の関数列という), $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、

$$(\forall z_0 \in \Omega) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

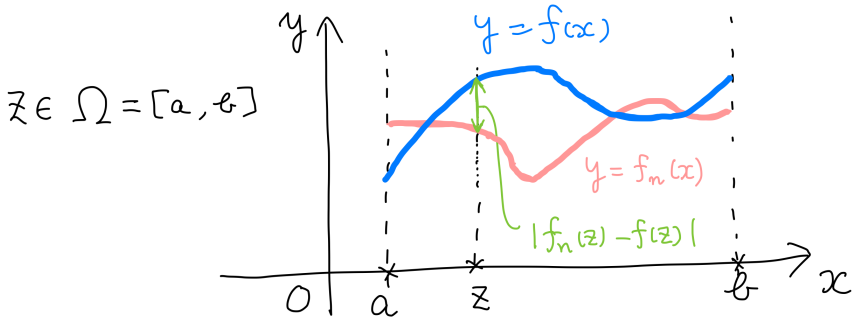
が成り立つことをいう。

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **一様収束**するとは、

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)



$\sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)|$ (赤線で描き込んでみよう) は、f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するということで、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \le \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

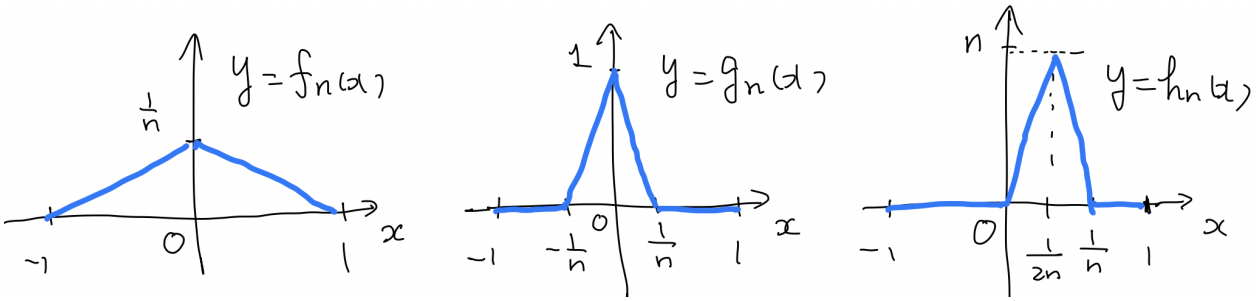
であるから、$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$ が成り立つ。

しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。以下の例を見よ。

注意 3.3 (各点収束は何の役に立つのか). 各点収束と一様収束では、極限の関数が共通であるので、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様収束するか調べるには、各点収束の極限 f を求めて、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するかを調べれば良い。 □

3.3.3 例

例 3.4 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分). $[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。



いずれも各点収束する。実際、任意の $x\in[-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := 0,\ \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) := \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0), \end{cases}\quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) := 0.$$

($\because \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について証明しよう。$-1\le x\le 0$ であれば、任意の n に対して $h_n(x)=0$. $0<x\le 1$ であれば、十分大きな n に対して $\frac{1}{n}<x$ であるから $h_n(x)=0$. ゆえに $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=0$. この真似をして $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ が示せる。)

一様収束するか

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{n},\quad \sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x)-g(x)| = 1,\quad \sup_{x\in[-1,1]} |h_n(x)-h(x)| = n.$$

($\because x\neq 0$ のとき、$|g_n(x)-g(x)| = g_n(x)$. ここで $x\to 0$ とすると 1 に収束することに注意する。)

ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束するが、$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。

項別積分可能であるか

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx,\quad \int_{-1}^{1} g_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0 = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx,$$
$$\int_{-1}^{1} h_n(x)dx = \frac{1}{2} \not\to 0 = \int_{-1}^{1} h(x)\,dx.$$

ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は項別積分可能であるが、$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は項別積分可能でない。

極限は連続か $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数 f, h は連続であるが、$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数 g は連続ではない。

表にまとめると

	収束の種類	項別積分可能か	極限関数は連続か
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	一様収束	○	○
$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	各点収束のみ	×	○
$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	各点収束のみ	○	×

実は、一様収束していれば、項別積分可能であり、かつ極限関数の連続性も成り立つ(後で証明する)。

各点収束だけでは、項別積分可能性や極限関数の連続性は成り立たない (上の例が反例になっている)。 □

3.3.4　一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは 3 つ述べるが、最初の 2 つが関数論で重要である。(3 つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

Cf.　絶対収束する級数では、和を取る順序を変更しても和は変わらない、という定理など、色々と便利なことが成り立つ。

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する (グラフが描けて理解の助けになる)。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。

(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

すると $|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{x'\in\Omega} |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに f は x_0 で連続である。 □

(2) 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち lim と $\int$ の順序交換出来る。

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \quad \left(\text{i.e. } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \right).$$

ただし、a と b は実数である $(-\infty, \infty$ ではない$)$ と仮定している。

(証明)　(1) より、f は連続であることに注意しよう。$n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|\, dx \\ &= \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \int_a^b dx \\ &= (b - a) \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \end{aligned}$$

であるから、$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$ □

(3) 各 n について f_n が C^1 級で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束し、$\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、f も C^1 級で $f' = g$. すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

(証明) 微積分の基本定理により、任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

$n \to \infty$ とすると (f_n' が g に一様収束するので、(2) を使って)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

g は連続であるので ($\because$ 連続関数列 $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様収束極限)、右辺は微分可能で、微分係数は $g(x)$. ゆえに f も微分可能で $f'(x) = g(x)$. これは連続であるから f は C^1 級である。 □

(この定理は、定理そのものよりも、証明の方が覚えやすいかもしれない。)

(実関数列の一様収束について説明したわけだが)
複素関数ではどうなるだろうか？

(1)「一様収束する連続関数列の極限は連続」…まったく同様に証明できる。
系として冪級数の和は収束円内で連続である (後述)。
(2)「一様収束するならば項別積分可能」…まだ複素線積分を定義していない訳であるが、まったく同様に証明できる。
(3) 実は**もっと本質的に強い定理**がある。

(3 改)「各 f_n が正則で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に広義一様収束するならば、f は正則で $f' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$」

(このことの証明には、Cauchy の積分公式が必要で、証明出来るのはずっと後になる。それまで待てないので、冪級数については、もっと直接的に証明することにする。) ということで、関数論のテキストでは、上の (3) はスルーするのが普通である。

3.3.5 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上？) は次の定理を用いる。

定理 3.26 (Weierstrass の M-test). Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の複素数値関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall z \in \Omega)\ |a_n(z)| \le M_n$
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は一様収束するし (ゆえに項別積分出来る)、各点 z で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は絶対収束する (ゆえに和を取る

順序が変えられる)。

証明 (ひとりごと: 定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \leq |S_n(z) - S_m(z)| \leq |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)| - \sum_{k=1}^{m} |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$
$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{m} M_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z \in \Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

(再掲 $*$) $$|s_n(z) - s_m(z)| \leq |S_n(z) - S_m(z)| \leq |T_n - T_m|$$

で $m \to \infty$ とすると

$$(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n(z) - s(z)| \leq |S_n(z) - S(z)| \leq |T_n - T|.$$

$z \in \Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z \in \Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z\in\Omega} |s_n(z) - s(z)| \leq \sup_{z\in\Omega} |S_n(z) - S(z)| \leq |T_n - T|.$$

$n \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は S に、$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は s に、それぞれ Ω で一様収束する。 □

3.3.6　冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 3.27 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)**.** $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列, $0 \leq \rho \leq +\infty$ とする。冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R\}, \quad \overline{D}(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq R\}.$$

注意 3.28 (広義一様収束)**.** 「トポロジー」などで、コンパクト集合の概念を知っている人に。上の定理から「収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束する」ことが導かれる。このことを「$D(c;\rho)$ で**広義一様収束**する (uniformly convergent on every compact set in $D(c;\rho)$)」という。この概念はとても重要であるが、この授業では上の定理の形で満足しておく (冪級数とその親戚しか出て来ないので、上の定理で何とかなる)。

□

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \leq M.$$

$M_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \leq R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \leq |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \leq M\left(\frac{R}{r}\right)^n = M_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{M}{1-R/r} \quad (\text{収束}).$$

Weierstrass の M-test (定理 3.26) によって、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、$\overline{D}(c;R)$ で一様に絶対収束する。

□

3.4　冪級数の項別微分

3.4.1　冪級数の項別微分定理

次の定理は特に重要である。

定理 3.29 (冪級数の項別微分定理, Abel)**.** 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

微分した結果が、やはり冪級数で、その収束半径が元と一致していることに注目しよう。そのことから何回でも微分できることが導かれることを理解しよう。

証明 $c=0$ として証明すれば良い。$g(z):=\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと

まず $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を注意しておく。

(実際 $b_n:=\sqrt[n]{n}$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $\log b_n=\log\left(n^{1/n}\right)=\frac{\log n}{n}\to 0$ であるから、$b_n=e^{\log b_n}\to e^0=1$.)

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^n$ $(=zg(z))$ の収束半径と同じであるので

$$g(z)\text{ の収束半径}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\rho.$$

実際、1 番目と 3 番目の等号は Cauchy-Hadamard の公式による。2 番目の等号 $=$ は次の (a), (b) による。

(a) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{n}\geq 1$ であるから、$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}\geq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

(b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある自然数 N が存在して、任意の自然数 $n\geq N$ に対して $\sqrt[n]{n}\leq 1+\varepsilon$ となる。ゆえに $\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n\,|a_n|}\leq(1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. ε は任意だから $\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n\,|a_n|}\leq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. □

第 2 段 $f'=g$ であること $0<R<\rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0;R)$ で正則で、$f'=g$ であることを示せば良い。

ε を任意の正数とする。($\sum_n na_nz^{n-1}$ が $z=R$ で絶対収束ゆえ) ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$(\star)\qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n|\,R^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$z \in D(0;R)$, $h \neq 0$, $z+h \in D(0;R)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\left((z+h)^n - z^n\right)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| \\ &\quad + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right|.\end{aligned}$$

右辺第 1 項は、$(z^n)' = nz^{n-1}$ より、$|h|$ が十分小さければ $\frac{\varepsilon}{3}$ より小さい。
右辺第 2 項については

$$\begin{aligned}|(z+h)^n - z^n| &= \left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\ &\leq |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\ &\leq |h|\left(nR^{n-1}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\text{右辺第 2 項} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|(z+h)^n - z^n|}{|h|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 3 項については (三角不等式, $|z| < R$, $(\star)$ により)

$$\text{右辺第 3 項} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|n a_n z^{n-1}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

以上より、$|h|$ が十分小さければ $\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| < \varepsilon$. ゆえに $f'(z) = g(z)$. □
復習: 収束半径が正である (つまり 0 でない) 冪級数を収束冪級数と呼ぶ。

系 3.30 (収束冪級数は Taylor 展開である). 収束冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の定める関数 f は、収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が c 中心の収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それはその関数の c における Taylor 展開に一致する。

証明 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_k (z-c)^{n-k}.$$

$z = c$ を代入すると、$n = k$ の項のみ残って

$$f^{(k)}(c) = k(k-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_k = k! a_k.$$

ゆえに $a_k = f^{(k)}(c)/k!$. □

系 3.31 (収束冪級数は原始関数を持つ). 収束冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F' = f$ が成り立つ。

証明 $F(z)$ を定義する冪級数を項別微分した冪級数は、$f(z)$ を定義する冪級に等しい。

$F(z)$ を定義する冪級数の収束半径は $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}}$ である。これは $f(z)$ の冪級数の収束半径 $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ に等しい ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ であるから)。 □

3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を収束冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

例 3.32 (基本). 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散であるから、$\rho = 1$.

これが $\dfrac{1}{1-z}$ の (0 における, 0 のまわりの) Taylor 展開に他ならない。 □

$\dfrac{1}{z+a}$ を 0 の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 3.33.

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

一般化しておくと: $a \neq 0$ であれば

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\rho = |a|$. 収束円は $D(0;|a|)$. □

$\dfrac{1}{z+a}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 3.34. $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| < 4.$$

ゆえに $\rho = 4$, 収束円は $D(1;4)$. □

例 3.35. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

(♯) $$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

これは公比 $-z^2$ の等比数列であるから、

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-z^2\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1.$$

$f(z)$ は、

$$a_n := \begin{cases} (-1)^k & (n \text{ が偶数のとき、} n = 2k \text{ とおくと}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せるので冪級数であり、$\rho = 1$.

別解 こういうやり方もある。

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$
$$= -\frac{i}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-i)^{n+1}}\right) \qquad \left(\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} \text{ を使った}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n + (-i)^n\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2}i^n z^n.$$

ここで止めても良いだろう。以下は念のための確認である。

n が奇数のとき、$(-1)^n + 1 = 0$. $n = 2k$ のとき $i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, $(-1)^n + 1 = 2$ であるから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \quad (\text{(♯) と一致する}).$$

□

$\dfrac{1}{(z+a)^n}$ の c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 3.36. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$.

まず、分母の冪の指数が 1 の場合 $(\dfrac{1}{z-1})$ は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

$$\text{ゆえに} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 3.31 を使う)。

例 3.37. $f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答)　$f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \quad (\text{収束半径は } 1).$$

これから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C \quad (\text{収束半径は } 1,\ C \text{ は積分定数}).$$

$f(0) = 0$ より $C = 0$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.$$

□

例 3.38. (辻・小松 [1] から拝借)

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$$

を 0 のまわりで冪級数展開 (Taylor 展開) してみよう。

$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z + 6$ で割ると、商 $z + 2$, 余り $3z - 7$ であるから、

$$f(z) = \frac{(z+2)(z^2-5z+6) + 3z - 7}{z^2 - 5z + 6} = z + 2 + \frac{3z-7}{z^2-5z+6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できる。$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z), q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z)$, $B(z)$ が存在する。$\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、$\deg A(z) < \deg p(z)$, $\deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z)$, $B(z)$ が存在する。

$A = 1, B = 2$ と求まる。ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \qquad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n \quad (\text{少なくとも } |z| < 2 \text{ で収束}). \end{aligned}$$

収束半径は 2 である。これは $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+2}}} = 2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることからも分かる（「収束半径が ρ_1, ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$ の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する）。 □

以上より、**有理関数は、部分分数分解が求まれば、容易に冪級数展開できることが分かる**。

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

「c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z) = z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

の形のままでは、a_n が何か、すぐには分からない。

$$f(z) = \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n$$

と整理してあれば一目瞭然である。つまり

$$a_0 = \frac{5}{6}, \quad a_1 = \frac{19}{36}, \quad a_n = -\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) \quad (n \geq 2). \quad \square$$

参考文献

[1] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満、 水本久夫。