複素関数・同演習 第 11 回
～幂級数 (3) 収束半径の求め方～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 28 日, 2026 年 11 月 4 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 幂級数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.2 収束円 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.2.4 ratio test ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
3.2.5 例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
参考文献 ・・ 9

0 本日の内容・連絡事項

-

3 幂級数 (続き)

3.2 収束円 (続き)

ρ ($0 \leq \rho < +\infty$ または $\rho = +\infty$) が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径であるとは

$$(|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$$

が成り立つことをいう。このとき $D(c;\rho)$ をこの幂級数の収束円とよぶ。

昨日の例で話し忘れたことを追加する。$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ について、

- $|z| < 1$ ならば収束
- $|z| \geq 1$ ならば発散

を示した。これから

- $|z| < 1$ ならば収束
- $|z| > 1$ ならば発散

が導かれる (当たり前)。ゆえにこの冪級数の収束半径は 1 である。 □

収束半径の求め方として、Cauchy-Hadamard という究極の公式があるが、上極限に慣れていないとちょっと使いにくい。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うためには上極限に慣れている必要があるので、少し敷居が高い。この講義では推奨しないが、一応紹介はしておく。

定理 3.9 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法)). ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.1}$$

ここで lim sup は上極限を表す。

- 任意の $\{a_n\}$ に対して、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (3.1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、lim sup を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨する。
- 証明は後述する ratio テストの証明とほぼ同様。難しくないので省略する。

一応 lim sup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ がすぐ求められるかもしれない。(例えば $\limsup_{n\to\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right] = 1$.)

定義 3.10 (上極限の定義). $\{a_n\}$ を実数列, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。λ が $\{a_n\}$ の**上極限** (the limit superior of $\{a_n\}$, limes superior ともいう) であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N)\ a_n < \lambda + \varepsilon$.
これは十分大きい任意の n に対して $a_n < \lambda + \varepsilon$ が成り立つ、ということである。

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}:\ n \geq N)\ a_n > \lambda - \varepsilon$.
これは $a_n > \lambda - \varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということである。

このことを $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lambda$ と表す。

さらに、次のような場合にも上極限 $\limsup a_n$ を定義する。

- $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは、任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、$a_n > U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とは、$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ を満たす、ということ。

命題 3.11. 任意の実数列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ の上極限は必ず一意的に定まる。

以下の系や命題は授業ではカットして、3.2.4 までスキップした。
Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 3.12 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版). べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、$\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明 「$\lim_{n\to\infty} A_n$ が確定すれば $\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$」(これは簡単に示せる) が成り立つから。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに次のように約束しておく。

$$\frac{1}{0} = +\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

注意 3.13. 極限 lim の場合にも言えることであるが、$+\infty$, $-\infty$ を扱うには、$\mathbb{R}$ の代わりに補完実数直線 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を導入する方が議論がしやすい面がある。実際、杉浦 [1] ではそうしている。ただし慣れていない人にとっては、そういう本はやや読みにくいかもしれない。 □

上極限と同様に下極限が定義される。これについて次の定理が成り立つ。

命題 3.14. $\{a_n\}$ を実数列とする。

(1) $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.
(2) $\{a_n\}$ が有界であるとする。このとき

$$\{a_n\} \text{ が収束する} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

値を求めたい場合、次の公式が役立つかもしれない。

命題 3.15. 任意の実数列 $\{a_n\}$ について次式が成り立つ:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} a_k. \tag{3.2}$$

上極限について詳しく説明してある本は意外と見つけにくい。もちろん杉浦 [1] には載っているが (V.1)、やや読みにくいかもしれない。「数学の方法」の教科書に指定してある砂田 [2] には、ていねいな説明が載っている (持っているならばそれを読みましょう)。少し古いが、三村編 [3] も良いと思う (私は学生の頃から頼りにしています)。上極限は、測度論や変分法など役立つ場面はかなり多いが、初等的な数学に必須かというと、そう言い切れない面がある (だから教師は、説明に時間を割くよりは、工夫してなしで済ませよう、と考えがち…言い訳です)。

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 3.16 (d'Alembert の判定法, ratio test)**.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

(もちろん、この公式は、$a_n = 0$ となる n が有限個しかない場合にのみ利用できる。)

証明 $c = 0$ の場合に証明すれば良い (以下 $z - c$ と書くのが面倒で z で済ませたいだけ)。

$\rho := \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z| < \rho$ ならば収束し、$|z| > \rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z| < \rho$ を満たすとする。$|z| < R < \rho$ となる R が存在するので、一つ取る。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)\ \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| > R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。$m \ge 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m} z^{N+m}\right| = \left|a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}} z^N z^m\right| \le \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \leq \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

(次のスライドに続く)

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \leq b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad \text{(収束)}.$$

優級数の定理 (定理 10.5) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N) \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \geq \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、$a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、ρ は収束半径である。 □

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。

幂級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 3.17 (最も基本的で重要な幂級数 — 等比級数). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$. □

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 3.18 (等比級数)**.** $c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\dfrac{z-c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$\text{収束} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-c_0}{R}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-c_0| < R.$$

ゆえに ($|z-c_0| < R$ で収束、$|z-c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R. 収束円は $D(c_0; R)$. □

例 3.19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$. □

例 3.20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$. □

例 3.21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$. □

例 3.22. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = n!$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ であるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 0$. 収束円は $\emptyset$. □

(簡単なまとめ)

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c, 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、k が何であっても 1.
- $c \neq 0$ とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{|c|}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^n$ の収束半径はそれぞれ 0, $+\infty$.

例 3.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n$.

このとき $c=1$, $a_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-2)^{n-1}/n|}{|(-2)^n/(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1;1/2)$. □

例 3.24 (重要でぜひマスターして欲しい例)**.** $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$. (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0, \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数, } k \text{ を } n=2k+1 \text{ で定めて}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}). \end{cases}$$

$a_n = 0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。

$\zeta := z^2$ とおくと[1)]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k.$$

そこで

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\lim_{k\to\infty} \left| \dfrac{b_k}{b_{k+1}} \right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$. また収束円は $\mathbb{C}$.

2026/10/28 の講義はここまでです。次回は例 3.25 までスキップするかも。

---

1) 共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しい変形であることが分かる。

別解　Cauchy-Hadamard の公式を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明}) \tag{3.3}$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. 極限が存在するとき、それは上極限に等しいので、Cauchy-Hadamard の公式から、$\rho = \dfrac{1}{0} = +\infty$ である。 □

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ を示すことが残っている。
これを示すには、(割と有名な) **Stirling の公式**

$$\log n! \sim n\log n - n + O(\log n) \tag{3.4}$$

を使うという方法がある。 それ以外に、次のような初等的な方法もある。

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{[n/2]-1} k \cdot \prod_{k=[n/2]}^{n} k \ge \prod_{k=1}^{[n/2]-1} 1 \cdot \prod_{k=[n/2]}^{n} [n/2] \ge ([n/2])^{n-[n/2]+1} \ge [n/2]^{n/2}$$

であるから ([　] は整数部分を表す)、

$$\sqrt[n]{n!} \ge \left([n/2]^{n/2}\right)^{1/n} = \sqrt{[n/2]} \to +\infty.$$

(証明終)

$\sin z$ の Taylor 展開の収束半径が $+\infty$ であることを二つの方法で示した。Hadamard の公式を使う方は少し難しく感じる人が多いかもしれない。Cauchy-Hadamard の公式は「究極の公式」であるが、使うためには覚えるべきことがたくさんあって、使いやすいかどうかは別問題であると思う。

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ などを覚えてしまう、という手はあるけれど…
収束半径が有限の場合についてコメントしておく。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$$

に対して、上と同様に $\zeta := z^2$ とおいて

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \zeta^2$$

と変形し、$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\zeta^2$ の収束半径が 3 であったとする。これは $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\zeta^n$ について

$$|\zeta| < 3 \Rightarrow \text{収束}, \quad |\zeta| > 3 \Rightarrow \text{発散}$$

を意味する。元の級数について $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$ については

$$\left|z^2\right| < 3 \Rightarrow \text{収束}, \quad \left|z^2\right| > 3 \Rightarrow \text{発散},$$

すなわち

$$|z| < \sqrt{3} \Rightarrow \text{収束}, \quad |z| > \sqrt{3} \Rightarrow \text{発散}.$$

ゆえに収束半径は $\sqrt{3}$ である。 □

例 3.25 (ratio test の使えない例)**.** $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ であるから冪級数である。ratio test は使えそうにない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n (z-c)^n| \leq |z|^n$ であり、$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n (z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

別解 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1 = 1$ であるから Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$. □

参考文献

[1] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 微積分の重積分・級数までの詳しい解説 (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.

[2] 砂田利一：微分積分, 基幹講座 数学, 東京図書 (2017/10/15).

[3] 三村征雄, 田村二郎, 新納文雄, 岩堀長慶, 松坂和夫：大学演習 微分積分学, 裳華房 (1955/2/25).