複素関数・同演習 第 10 回
～幂級数 (2) 収束円と収束半径～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 27 日, 2026 年 10 月 27 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 幂級数 ・・ 1
3.2 収束円 ・・・ 2
3.2.1 収束円の存在 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.2.2 収束半径の求め方の考え方 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
3.2.4 ratio test ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8
3.2.5 例 ・・・ 9
参考文献 ・・ 12

0 本日の内容・連絡事項

- 宿題 2 のフィードバック済みました。ちゃんと届いているか確認して下さい。
- 宿題 4、朝の段階では提出が少なくて、これはフィードバック楽だと思ったのだけれど、ここに来て提出率上がった。残念 (笑)。
- 本日は幂級数 (講義ノート [1] の §2.5) の 2 回目。収束円は何か、がテーマです。

3　幂級数

3.2　収束円

3.2.1　収束円の存在

補題 3.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する). ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。

以下 $z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに (「収束する数列は有界」なので)

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する (後で詳しく説明するかも)。

優級数の定理から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。　□

定理 3.2 (優級数の定理). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\le b_n$　　(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n:=\sum_{k=1}^{n}|a_k|,\quad T_n:=\sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n>m$ のとき

$$|S_n-S_m|=\left|\sum_{k=1}^{n}|a_k|-\sum_{k=1}^{m}|a_k|\right|=\left|\sum_{k=m+1}^{n}|a_k|\right|\le\sum_{k=m+1}^{n} b_k=T_n-T_m=|T_n-T_m|.$$

n, m の大小関係によらず $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。 ゆえに

$$\sum b_n \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が Cauchy 列}$$
$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ が収束}$$
$$\Rightarrow \sum a_n \text{ が収束.} \quad \square$$

上の (c) 「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、証明してみよう。

定理 3.3 (級数が絶対収束するならば収束する). $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

証明 $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして) $|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \leq S_m - S_n = |S_n - S_m|$. ゆえに一般に $|s_n - s_m| \leq |S_n - S_m|$ が成り立つ。 ゆえに

$$\sum |a_n| \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列}$$
$$\Rightarrow \{s_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ が収束.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すると仮定しているので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。 $\square$

補題 3.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_0 で収束するならば、z_1 でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_1 で発散するならば、z_0 でも発散する。

定理の形にしておく。

系 3.4 (ある点で発散すれば、より中心から遠い任意の点で発散する). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が $z = z_1$ で発散するならば、$|z - c| > |z_1 - c|$ を満たす任意の z に対して発散する。

「収束する点より近い点では収束、発散する点より遠い点では発散。」

以上の準備のもと、収束円の存在定理を証明する。

定理 3.5 (収束半径・収束円の存在). $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列とする。このとき冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、次のうちどれか 1 つ (だけ) が成立する。

(i) 任意の $z \neq c$ に対して発散する。
(注: $z = c$ ではつねに収束する。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$.)

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

(iii) ある $\rho \in (0, +\infty)$ が存在して、$|z-c| < \rho$ ならば収束し、$|z-c| > \rho$ ならば発散する。

証明のあらすじ (i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する z_1 $(\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.
もしも等号が成り立つならば、$\rho := |z_1 - c|$ $(= |z_0 - c|)$ とおけば良い。

以下では、$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ と仮定する。図を描いて、2 色のペンを持ち、「z_1 よりも c に近いところでは収束」、「z_0 よりも c から遠いところでは発散」。ここから二分法を始める。簡単なのだが、文章だけで説明するとかえって面倒な (一応、講義ノート [1] には書いておいたが、読みにくい) ので省略する。 □

定義 3.6 (収束半径, 収束円). 上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho := 0$, (ii) のとき $\rho = +\infty$ とおき、ρ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束半径** (the radius of convergence) という。また

$$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束円** (the circle of convergence) という。
($\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ であることに注意)

この定義から
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が $\rho \Leftrightarrow$ ($|z-c| < \rho$ ならば収束かつ $|z-c| > \rho$ ならば発散)
何かある数が収束半径であることを示すために、このことはよく使われる。

注意 3.7 (収束円の境界). 収束円の境界 $|z-c| = \rho$ の上にある z でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

例 3.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく). $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c = 0$, $a_n = 1$ $(n \geq 0)$ の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z \neq 1) \\ \lim_{n\to\infty} (n+1) & (z = 1) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & (|z| < 1) \\ \text{発散} & (|z| \geq 1). \end{cases}$$

これから、$|z|<1$ ならば収束、$|z|>1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(0;1)$. この結果は、実は非常に非常に重要である。冪級数は等比級数に似ていて、その収束・発散は等比級数と比較して証明されることが多いから。 □

$r \in \mathbb{C}$ に対して、$\lim_{n\to\infty} r^n$ を調べておく。

$|r|<1$ ならば

$$|r^n| = |r|^n \to 0 \quad (n \in \infty).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} r^n = 0.$

一方、$|r|>1$ ならば

$$|r^n| = |r|^n \to +\infty \quad (n \in \infty).$$

ゆえに $\{r^n\}$ は収束しない (「収束列は有界」に反する)。

以下 $|r|=1$ とする。極形式 $r = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ を用いて考える。$\theta = 0$ の場合は $r=1$ であるから、$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$ $0<\theta<2\pi$ の場合は、$r^n = r^{in\theta}$ は単位円周を (n が増えるごとに偏角が一定の量増えて) 周りつづけて止まらないので、収束しない。

…というようなことをしばしば話すが、最後の部分は次のようにするのが、論理的にはすっきりしているかも。

$|r|=1, r\neq 1$ とする。もしも $\{r^n\}$ が収束するならば $r^n - r^{n+1} \to 0$ のはずであるが、

$$\left|r^n - r^{n+1}\right| = |r^n(1-r)| = |r|^n\,|1-r| = 1^n\,|1-r| = |1-r| > 0.$$

この値は n によらない正の定数であるから矛盾する。ゆえに収束しない。

3.2.2 収束半径の求め方の考え方

冪級数の収束について、次のように考えることを勧める。

冪級数は等比級数に近いので、等比級数と比べて収束半径を求める

$a_n(z-c)^n \sim r^n$ とみなす。$|r|$ に相当するものがどのようにして求められるか？

(a) 比を取る ($|r^{n+1}| \,/\, |r^n| = |r|$)。

$$\frac{|a_{n+1}(z-c)^{n+1}|}{|a_n(z-c)^n|} = |z-c|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

であるから、$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z-c| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である (d'Alembert, ratio test)。

(b) n 乗根を取る ($\sqrt[n]{|r|^n} = |r|$)。

$$\sqrt[n]{|a_n(z-c)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z-c|$$

であるから、$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z-c|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である。実は lim を lim sup とすることが出来て、究極の答えになる (Cauchy-Hadamard の公式)。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので推奨しないが、紹介はしておく。

定理 3.9 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法)). べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\frac{1}{0}=+\infty$, $\frac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.1}$$

ここで lim sup は上極限を表す。

- 任意の $\{a_n\}$ に対して、$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (3.1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、lim sup を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨する。
- 証明は後述する ratio テストの証明とほぼ同様。難しくないので省略する。

一応 lim sup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ がすぐ求められるかもしれない。(例えば $\limsup_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=1$.)

定義 3.10 (上極限の定義). $\{a_n\}$ を実数列, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。λ が $\{a_n\}$ の**上極限** (the limit superior of $\{a_n\}$, limes superior ともいう) であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ a_n < \lambda + \varepsilon$.
これは十分大きい任意の n に対して $a_n < \lambda + \varepsilon$ が成り立つ、ということである。

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ a_n > \lambda - \varepsilon$.
これは $a_n > \lambda - \varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということである。

このことを $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lambda$ と表す。

さらに、次のような場合にも上極限 $\limsup a_n$ を定義する。

- $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは、任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、$a_n > U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とは、$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ を満たす、ということ。

命題 3.11. 任意の実数列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ の上極限は必ず一意的に定まる。

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 3.12 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版). べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、$\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明 「$\lim_{n\to\infty} A_n$ が確定すれば $\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$」(これは簡単に示せる) が成り立つから。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに次のように約束しておく。

$$\frac{1}{0} = +\infty, \quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

注意 3.13. 極限 lim の場合にも言えることであるが、$+\infty$, $-\infty$ を扱うには、$\mathbb{R}$ の代わりに補完実数直線 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を導入する方が議論がしやすい面がある。実際、杉浦 [2] ではそうしている。ただし慣れていない人にとってはやや読みにくいかもしれない。 □

上極限と同様に下極限が定義される。これについて次の定理が成り立つ。

命題 3.14. $\{a_n\}$ を実数列とする。

(1) $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.
(2) $\{a_n\}$ が有界であるとする。このとき

$$\{a_n\} \text{ が収束する} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

値を求めたい場合、次の公式が役立つかもしれない。

命題 3.15. 任意の実数列 $\{a_n\}$ について次式が成り立つ:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} a_k. \tag{3.2}$$

上極限について詳しく説明してある本は意外と見つけにくい。もちろん杉浦 [2] には載っているが (V.1)、やや読みにくいかもしれない。「数学の方法」の教科書に指定してある砂田 [3] には、ていねいな説明が載っている (持っているならばそれを読みましょう)。少し古いが、三村編 [4] も良いと思う (私は学生の頃から頼りにしています)。上極限は、測度論や変分法など役立つ場面はかなり多いが、初等的な数学に必須かというと、そう言い切れない面がある (だから教師は、説明に時間を割くよりは、工夫してなしで済ませよう、と考えがち…言い訳です)。

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 3.16 (d'Alembert の判定法, ratio test)**.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明 $c = 0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho := \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z| < \rho$ ならば収束し、$|z| > \rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z| < \rho$ を満たすとする。$|z| < R < \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n \in \mathbb{N}:\ n \ge N)\ \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| > R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。$m \ge 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m} z^{N+m}\right| = \left|a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}} z^N z^m\right| \le \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると任意の $n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \le \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad \text{(収束)}.$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N) \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \ge \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、$a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、ρ は収束半径である。 □

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。

幂級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 3.17 (最も基本的で重要な幂級数 — 等比級数). $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \frac{1}{1} = 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$.

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 3.18 (等比級数). $c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \frac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\dfrac{z - c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$\text{収束} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z - c_0}{R}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - c_0| < R.$$

ゆえに ($|z - c_0| < R$ で収束、$|z - c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R. 収束円は $D(c_0; R)$. □

例 3.19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

例 3.20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

例 3.21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$.

例 3.22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

このとき $c = 0$, $a_n = n!$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ であるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 0$. 収束円は $\emptyset$.

(簡単なまとめ)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c, 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、k が何であっても 1.
- $c \neq 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{|c|}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n$ の収束半径はそれぞれ $0, +\infty$.

例 3.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n$.

このとき $c=1$, $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-2)^{n-1}/n|}{|(-2)^n/(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1;1/2)$.

例 3.24. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$. (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数, } k \text{ を } n=2k+1 \text{ で定めて}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}). \end{cases}$$

$a_n = 0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。

$\zeta := z^2$ とおくと[1)]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k.$$

例 3.24 (つづき). そこで

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$.

例 3.25 (つづき　別解). Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 3.12) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

$$(3.3) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{すぐ後で証明})$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. ゆえに系 3.12 の公式から、$\rho = \frac{1}{0} = +\infty$ である。

---

1) 共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

例 3.26 (ratio test の使えない例)**.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

でも実は簡単である。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \leq |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n(z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

別解 上極限の定義から $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. ゆえに Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$. □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 微積分の重積分・級数までの詳しい解説 (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.

[3] 砂田利一：微分積分, 基幹講座 数学, 東京図書 (2017/10/15).

[4] 三村征雄, 田村二郎, 新納文雄, 岩堀長慶, 松坂和夫：大学演習 微分積分学, 裳華房 (1955/2/25).