複素関数・同演習 第 9 回
～Cauchy-Riemann 方程式 (続き)，冪級数～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 21 日, 2026 年 10 月 26 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2 複素関数の極限・連続性・正則性 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2.5 Cauchy-Riemann の方程式 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.5.3 正則関数と調和関数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.5.4 等角性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
2.5.5 逆関数定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
3 冪級数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
3.1 イントロ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7

0 本日の内容・連絡事項

- 宿題 3、10 月 21 日朝の段階で提出率 70%になりました。もう一息かな。本日の講義の終了後に一時的に締めます (それまでに提出されたものについて、フィードバックの用意をする)。解答 PDF 公表は数日待ちます。
  2026/10/21 14:20 80% になりました。もうひと頑張りだな。講義の時に言いましたが、今晩 20 時に閉じます。
- 宿題 4 は “いつも通り” にするのでよろしく。
- 本日は Cauchy-Riemann 方程式 (講義ノート [1] の §2.5) の 3 回目。多分 3 節の冪級数に入れると思います。

2　複素関数の極限・連続性・正則性 (続き)

2.5　Cauchy-Riemann の方程式 (続き)

2.5.3　正則関数と調和関数 (続き)

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2.1}$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。

また (2.1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{2.2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素** (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (2.1) は

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2.3}$$

と表せる。

(ベクトル解析既習者向け) $\triangle$ のことを ∇^2 とも書く ($\triangle u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ だから)。

次は非常に有名で重要な結果である。

定理 2.1 (正則関数の実部・虚部は調和関数である). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である

証明　後で「f が正則ならば、f は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

同様にして $v_{xx}+v_{yy}=0$ も証明できる。 □

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

2026/10/21 の講義はここからです。

$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、v を u の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

注意 2.2 (ときどきある勘違いを注意しておく). v が u の共役調和関数であるとき、u は v の共役調和関数であるとは限らない。実際、u が v の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

($U := v$, $V := u$ とおいて $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ を考えてみればわかる)

が成り立つことを意味するが、同時に v が u の共役調和関数であれば

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、結局 $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、u と v は定数関数となってしまう。

(**蛇足**　w が z の共役複素数であるとき、z は w の共役複素数である ($w = \overline{z} \Rightarrow z = \overline{w}$)。それと同じようなことだと勘違いしないこと。)

2.5.4　等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。

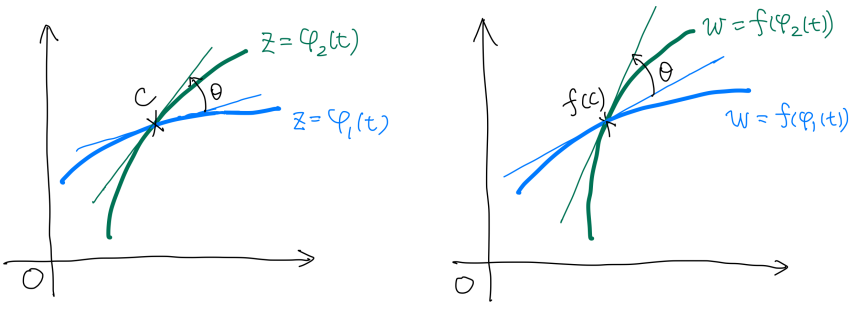


図 1　z 平面内の曲線を $w = f(z)$ で w 平面内の曲線に写すと

理由の説明 (ていねい化すると証明になる)　Ω 内の曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w = f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

$$c = \varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c) = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

- 曲線 φ の c における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の正数倍).
- 曲線 $f\circ\varphi$ の $f(c)$ における接ベクトルは

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi(t)))\Big|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(c)\varphi'(t_0) = \rho e^{i\phi}\varphi'(t_0) \quad (\text{の正数倍}).$$

$\cdots$ ゆえに曲線によらない (f だけで定まる) 共通の角度 ϕ だけ偏角が変化する。

□

一般に、定義域 Ω 全体で $f'\neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p,q\in\mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = |f'(c)|^2 \quad (= p^2+q^2). \tag{2.4}$$

($f'(c) = p+qi$ となることを思い出そう。(2.4) はそれ自体重要な公式。)

$f'(c) = p+qi \neq 0$ を仮定して、$f'(c)$ の偏角を ϕ とすると

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2+q^2}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) \fallingdotseq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\boldsymbol{h}$$

の右辺は、$\boldsymbol{h}$ を角度 ϕ だけ回転して長さを $\sqrt{p^2+q^2}$ したものである。

一般に、$ad-bc\neq 0$ を満たす $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ に対して、1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じ、角度が保存されないこともある) が、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形の 1 次変換は正方形を正方形に写す (歪まず、角度は保存される)。

以上のように考えても、等角性が成り立つことが分かる。

2.5.5 逆関数定理

定理 2.3 (正則関数の逆関数定理 (弱い形)). f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

略証 微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\tilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、$\boldsymbol{f}$ を $\tilde{U}$ に制限した写像

$$\boldsymbol{f}|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\tilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する $\boldsymbol{f}$ については (c に十分近い任意の $\tilde{c}$ に対して、$f'(\tilde{c}) = p + iq$ $(p, q \in \mathbb{R})$ とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}}) = |f'(\tilde{c})|^2 \neq 0, \quad (\boldsymbol{f}'(\tilde{\boldsymbol{c}}))^{-1} = \frac{1}{p^2+q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する f の局所的逆関数 $(f|_U)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

ゆえに $(f|_U)^{-1}$ は正則関数である。 □

注 後で「f が正則ならば、f は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「f' が連続」を入れる必要はなくなる (強い形の逆関数定理が得られる)。

2026/10/20 の週はここまで来れば十分と考えていますが、次の節に入れれば、それに越したことはない。

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが (もちろん実関数としての取り扱い)、複素関数として考えることでその本質が浮き彫りにされる。

冪 (べき) 級数とは、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、c は複素数である。)

意味は $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (z-c)^k$. その極限を級数の和と呼ぶ。

雑談 「冪 (べき)」は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」(素直に「まく」というべきかしら) からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが (略すにしても乱暴な感じがする)、「冪」と書くのは面倒だし、がんばって書いても見にくいので、

「板書ではカタカナの「ベキ」で通す」と例年言っている。スライドでやる場合は「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いて構わない。

ベキ級数の話はかなり長くなるので、この節で何が分かるか、少し長めのイントロを用意した。

3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

解析的 $\stackrel{\text{def.}}{=}$ 定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる

「解析関数」を解析的な関数という意味に取ると、実は「正則関数」と同じ意味であることが後で分かる (正則 $\Leftrightarrow$ 解析的)。一方で「解析関数」という言葉は、少し違った意味 (解析接続で定まる関数など) で使われることもある。

いくつか事実を述べる。

(1) 高校生の知っている関数 (多項式関数, 有理関数, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$) はほとんどが Taylor 展開可能である (例外は $|x|$ とか)。つまり $f\colon I \to \mathbb{R}$ に対して

$$(\forall c \in I)(\exists \varepsilon > 0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad (|x-c| < \varepsilon).$$

これはベキ級数である (「Taylor 展開は冪級数」)。ゆえに f は解析的 (実解析的) である。

x を複素変数 z に置き換えると複素関数に拡張できる。それらは実は正則 (解析的) である。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

$(\exists \rho\colon\ 0 \le \rho \le +\infty)$ $(|z-c| < \rho \Rightarrow$ 収束$) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow$ 発散$)$

ρ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

- $\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$ ($z = c$ 以外では発散ということ)
- $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ (すべての複素数 z で収束ということ).

(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

$\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

収束円の内部ではかなり自由な演算が出来る。とても簡単 (多項式関数とあまり変わらない)。

(a) 項別微分出来る。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n.$$

冪級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で正則。ゆえに「解析的ならば正則」。

(b) 項別積分が出来る。

後で曲線 C に沿う線積分 $\int_C f(z)\ dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 C (始点 a, 終点 b として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\ dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\ dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

(3) 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。

つまり Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $D(c;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\geq 0})(\forall z \in D(c;\varepsilon)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)

(ベキ級数の収束半径 ρ は $\rho \geq \varepsilon$ を満たす、ということになる。)

この節では、主に収束円の存在と (2)(a) の証明を目標にする ((b) は積分の定義をしてから)。(3) を証明するにはたくさんの準備が必要で、証明するのは少し後になる。

2026/10/21 の講義では大体この辺まで説明しました。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).