複素関数・同演習 第 8 回
～Cauchy-Riemann 方程式 (続き)，冪級数～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 20 日, 2026 年 10 月 21 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2 複素関数の極限・連続性・正則性 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2.4 微分、正則性 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.5 Cauhcy-Riemann の方程式 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.5.2 正則関数が定数となる場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.5.3 正則関数と調和関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
参考文献 ・・ 6

0 本日の内容・連絡事項

- 宿題 3 の提出先を昨日 (2026/10/19) まで作るのを忘れていました。すみません。〆切を 10 月 21 日の 11:30 に変更します。それまでに何%の提出があるかなあ…今週は今週で宿題 4 を出すので、宿題 3 は早めに出して欲しいのだけど。(宿題 3 の解説もしたいというのもある…)
- 宿題を紙に手書きした場合、なるべくスキャンして下さい、と言いましたが、最近のスキャンアプリ事情を調べたところ、iPhone では Apple 純正アプリで OK, Android では Google ドライブで OK、ということが分かりました。やり方は自由ですが、有償アプリを勧められたりしないで済むのは良くなりましたね。
- 本日は Cauchy-Riemann 方程式 (講義ノート [1] の §2.5 後半) を解説する。2.5.2, 2.5.3 は多くのテキストに載っていて試験問題のネタになるが、2.5.4, 2.5.5 も後々重要となるところである。

2　複素関数の極限・連続性・正則性 (続き)

2.4　微分、正則性 (続き)

2.4.5　合成関数の微分法と逆関数の微分法

2026/10/14 の講義では、ここを飛ばした。

合成関数の微分法　f と g が合成可能で、f が c で、g が $f(c)$ で微分可能ならば、$g \circ f$ は c で微分可能で

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c). \tag{2.1}$$

あるいは $w = f(z), \zeta = g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta = g(f(z))$ について

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{dz}. \tag{2.2}$$

逆関数の微分法　関数 $w = f(z)$ が微分可能かつ全単射であるとき、逆関数 $z = f^{-1}(w)$ について

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz \neq 0 \text{ とする}) \tag{2.3}$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

2.5　Cauhcy-Riemann の方程式 (続き)

2.5.2　正則関数が定数となる場合

有名な定理 2.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

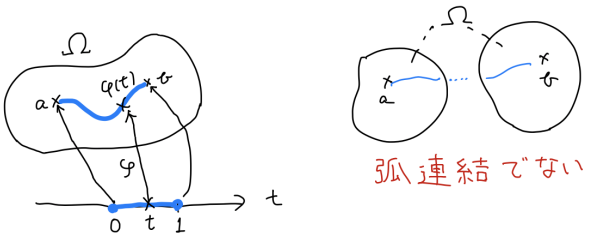
反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。
定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合も、同様のことをしたければ、**(弧) 連結性**の概念が必要になる。

定義 2.1 (弧連結, 領域). $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。
(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。



直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。
(このスライドは省略するのかな。軽く言うくらい。)

注意 2.2 (上の定義は実は普通でない). 普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- $\mathbb{R}^\ell$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

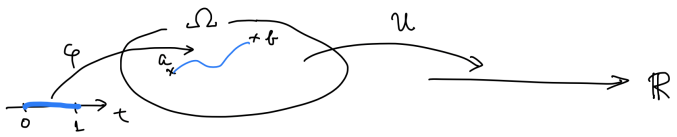
という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

$\mathbb{R}$ の部分集合 I について、I が区間 $\Leftrightarrow$ I は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)。
次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 2.3 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である). Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)

以上より u は Ω 全体で定数関数である。　□

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている (知らないと時々困るので紹介する)。

定理 2.4 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数). Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

(1) f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。

(2) $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明　$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$ とおく。

(1) 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.

Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.

補題 (？) より、v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv$ も定数関数である。

(2) $|f| = C$ (C は定数) とおく。

$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。

以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x,y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2+v^2=C^2>0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2+u_y^2=0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x=u_y=0$ (in $\widetilde{\Omega}$). 補題 ? より、u は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。(1) より f は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。 □

前回の例 ($\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, $\log|z|$ は定義域に属する任意の点で微分できない) と見比べると良い。

$\bar{z}$ を除いて実数値関数であり、虚部が 0 であるから、もし正則ならば定数関数であるが、定数でないことはすぐ分かるので、正則でない。

正則でないことは、任意の点 z に対して微分可能でないことと同値ではないが (部分否定と全否定)、わかりやすく感じる人が多いだろう。

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2.4}$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。

また (2.4) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{2.5}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素** (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (2.4) は

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2.6}$$

と表せる。

(ベクトル解析既習者向け) $\triangle$ のことを ∇^2 とも書く ($\triangle u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla\cdot(\nabla u)$ だから)。

次は非常に有名で重要な結果である。

定理 2.5 (正則関数の実部・虚部は調和関数である). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である

証明　後で「f が正則ならば、f は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

同様にして $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

2026/10/20 の講義はこのあたりまでです。

$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、v を u の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

注意 2.6 (ときどきある勘違いを注意しておく). v が u の共役調和関数であるとき、u は v の共役調和関数であるとは限らない。実際、u が v の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

が成り立つことを意味するが、v が u の共役調和関数であれば

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、u と v は定数関数となる。

(**蛇足**　w が z の共役複素数であるとき、z は w の共役複素数である ($w = \overline{z} \Rightarrow z = \overline{w}$)。それと同じように勘違いしないこと。)

参考文献

[1]　桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).