

複素関数・同演習 第7回

～複素関数の微分可能性・Cauchy-Riemann 方程式～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 10 月 14 日

目次

0	本日の内容・連絡事項	1
2	複素関数とその極限、連続性、正則性 (続き)	2
2.4	微分、正則性	2
2.4.1	定義	2
2.4.2	例	2
2.4.3	微分可能な関数の和・差・積・商	3
2.4.4	多項式と有理関数の正則性	3
2.4.5	合成関数の微分法と逆関数の微分法	3
2.5	Cauchy-Riemann の方程式	4
2.5.1	微分可能性の必要十分条件	4
2.5.2	正則関数が定数となる場合	6
2.5.3	正則関数と調和関数	8
2.5.4	等角性	9
2.5.5	逆関数定理	10
	参考文献	11

0 本日の内容・連絡事項

- 複素関数の微分可能性の話始める。定義は実関数のときと形式的に同じと言えるが、実関数とは全く違った性質を持つ。手始めとして Cauchy-Riemann 方程式を論じる。

- 宿題 3 を出す (〆切は 10 月 20 日 13:30)。次回、サイズが 5MB 超えた人は点呼のときに指摘する。11 月以降は 0.5 回提出とカウントする。
- 宿題 1,2 は解答公開済み。宿題 1 はフィードバック済み。

2 複素関数とその極限、連続性、正則性 (続き)

2.4 微分、正則性

2.4.1 定義

定義 2.1 (微分可能, 正則). 簡単のため, Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, c \in \Omega$ とする。 f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このとき、この極限を $f'(c)$ と表し、 f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。

導関数 (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、 f が z で微分可能であるとき、 f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2 例

例 2.2 (正則な関数の例). $f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、 $\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

であるから、 f は z で微分可能で $f'(z) = 0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

また

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h - z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

であるから、 g は z で微分可能で $g'(z) = 1$. g は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 2.3 (微分可能な関数の和・差・積・商). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $c \in \Omega$ とする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ と $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、 $f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned}(f + g)'(c) &= f'(c) + g'(c), \\(f - g)'(c) &= f'(c) - g'(c), \\(fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.\end{aligned}$$

証明 実関数の場合と同様である。 □

2.4.4 多項式と有理関数の正則性

系 2.4 (多項式と有理関数の正則性). (1) 任意の自然数 k に対して、 $f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、 $f'(z) = kz^{k-1}$.

(2) 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(2 つめの等式がすらすら導けるように。「 $k-1=j$ とおくと…」)

(3) 任意の複素係数有理式 $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない) の定める関数 $r: \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

2026/10/14 の講義では、ここを飛ばした。2026/10/20 の講義で説明する予定である。

合成関数の微分法 f と g が合成可能で、 f が c で、 g が $f(c)$ で微分可能ならば、 $g \circ f$ は c で微分可能で

$$(1) \quad (g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

あるいは $w = f(z)$, $\zeta = g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta = g(f(z))$ について

$$(2) \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dw} \frac{dw}{dz}.$$

逆関数の微分法 関数 $w = f(z)$ が微分可能かつ全単射であるとき、逆関数 $z = f^{-1}(w)$ について

$$(3) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz \neq 0 \text{ とする})$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

2.5 Cauchy-Riemann の方程式

2.5.1 微分可能性の必要十分条件

定理 2.5 (複素関数が微分可能 $\Leftrightarrow$ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とする。 f が c で微分可能であるためには、 f の実部 u と虚部 v が (a, b) で (全) 微分可能でかつ

$$(\star) \quad u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b)$$

を満たすことが必要十分である。

($\star$) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u , 虚部 v は、 $u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

例 2.6 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る). 正則な $f(z) = z^2$ ($z \in \mathbb{C}$), $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $f(z) = e^z$ ($z \in \mathbb{C}$) などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを確かめてみよう。

例 2.7 (微分可能でないことの証明に使ってみる). $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$ (以上は $\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z) = \operatorname{Arg} z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $f(z) = \log |z|$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) は任意の z に対して、 z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z) = \log |z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, 虚部 $v(x, y) = 0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 。

ゆえに $u_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $v_x(x, y) = 0$, $v_y(x, y) = 0$. $x \neq 0$ であれば $u_x \neq v_y$, $y \neq 0$ であれば $u_y \neq -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

以上より、任意の点 (x, y) において、「 u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。□

定理 2.5 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) で微分可能ならば、 u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\#) \quad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b))$$

が成り立つ。

特に実部・虚部を比較して $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$.

((#) を $f' = f_x = \frac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが¹⁾ 分かりやすいかもしれない。ここでは Cauchy-Riemann 方程式を導くために用いたが、(#) 自体は覚えておく価値がある。宿題で使う問題を出す。)

証明 f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、 $h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。 (次のスライドに続く)

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)

$f(c+h_x) = u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \rightarrow 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) = u_x(a, b) + iv_x(a, b). \end{aligned}$$

(b) $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)

$f(c+ih_y) = u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_y \rightarrow 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{(u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{ih_y} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_y \rightarrow 0} \left(\frac{u(a, b+h_y) - u(a, b)}{h_y} + i \frac{v(a, b+h_y) - v(a, b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)). \end{aligned}$$

以上から

$$f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} [u_y(a, b) + iv_y(a, b)] = v_y(a, b) - iu_y(a, b).$$

1) うるさく言うと、 f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、 f_x, f_y という書き方は変である。

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad v_x(a, b) = -iu_y(a, b). \quad \square$$

定理 2.5 の証明 f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

$h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) とおくと

$$f(c+h) - f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) + i(v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b)),$$

$$(p+iq)h = (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\ &= \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|} \\ &= \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|. \end{aligned}$$

ゆえに

f が c で微分可能

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\text{かつ} \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u \text{ と } v \text{ は } (a, b) \text{ で (全) 微分可能で}$$

$$u_x(a, b) = p, \quad u_y(a, b) = -q, \quad v_x(a, b) = q, \quad v_y(a, b) = p$$

$$\Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ は } (a, b) \text{ で (全) 微分可能で } u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b). \quad \square$$

2026/10/14 の講義はここまでです。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 「正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である」を紹介する。

これを使うと、 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

その定理の証明の準備をする。次の問を考えてみよう。

問 $f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答 無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「 $f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

$$\text{反例: } I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

もしも I が区間ならば、 f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。

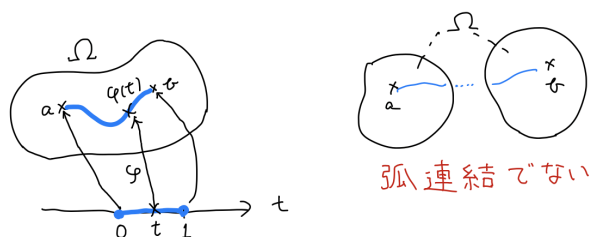
定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合も、同様のことをしたければ、(弧) 連結性の概念が必要になる。

定義 2.8 (弧連結, 領域). $\Omega \subset \mathbb{R}^{\ell}$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が **弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、 Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、 Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ で、 $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、 Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を **領域** (region) と呼ぶ。



直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、 Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを **弧連結成分** と呼ぶ。

注意 2.9 (上の定義は実は普通でない). 普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- ・「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- ・ $\mathbb{R}^{\ell}$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

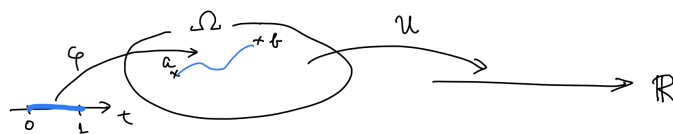
$\mathbb{R}$ の部分集合 I について、 I が区間 $\Leftrightarrow I$ は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、 Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、 C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 2.10 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である). Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、 $u' = 0$ を満たすならば、 u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明 任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ が存在して、 φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、 $F(t) := u(\varphi(t))$ ($t \in [0, 1]$) とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)

以上より u は Ω 全体で定数関数である。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、 u は調和関数 (harmonic function) であるという。

また (4) を Laplace 方程式 (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

$$(5) \quad \Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 Δ を Laplace 作用素 (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (4) は

$$(6) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

と表せる。

(ベクトル解析既習者向け) Δ のことを ∇^2 とも書く ($\Delta u = \text{div}(\text{grad } u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ だから)。

次は非常に有名で重要な結果である。

定理 2.11 (正則関数の実部虚部は調和関数である). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とすると、 f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\})$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である

証明 後で「 f が正則ならば、 f は何回でも微分可能」という定理を証明する。先走ってそれを認めることにする。 u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、 v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

同様に $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短かに述べられる。

$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、 v を u の共役調和関数 (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

Remark 2.1 (ときどきある勘違いを注意しておく). v が u の共役調和関数であるとき、 u は v の共役調和関数であるとは限らない。実際、 u が v の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

が成り立つことを意味するが、 v が u の共役調和関数であれば

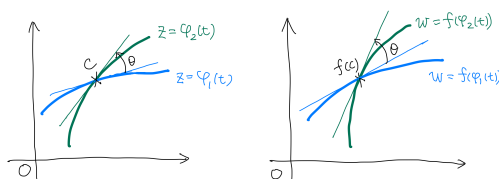
$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、 $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、 u と v は定数関数となる。

(蛇足 w が z の共役複素数であるとき、 z は w の共役複素数である ($w = \bar{z} \Rightarrow z = \bar{w}$)。それと同じように勘違いしないこと。)

2.5.4 等角性

正則関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は、 $f'(c) \neq 0$ であれば、 c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。



理由の説明 (ていねい化すると証明になる) Ω 内の曲線 $z = \varphi(t)$ ($t \in I$) を関数 $w = f(z)$ ($z \in \Omega$) でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ ($t \in I$) が得られる。

$$c = \varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c) = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

- 曲線 φ の c における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の正数倍)。
- 曲線 $f \circ \varphi$ の $f(c)$ における接ベクトルは

$$\left. \frac{d}{dt}(f(\varphi(t))) \right|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(c)\varphi'(t_0) = \rho e^{i\phi}\varphi'(t_0) \quad (\text{の正数倍}).$$

… ゆえに曲線によらない (f だけで定まる) 共通の角度 ϕ だけ偏角が変化する。 $\square$

一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を **等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c \end{pmatrix}$$

とおくと、 $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow f \text{ が } c \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad f'(c) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、 $f'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$(7) \quad \det f'(c) = |f'(c)|^2 \quad (= p^2 + q^2).$$

($f'(c) = p + qi$ となることを思い出そう。(7) はそれ自体重要な公式。)

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、 $f'(c)$ の偏角を ϕ とすると

$$f'(c) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

ゆえに

$$f(c+h) - f(c) \doteq f'(c)h$$

の右辺は、 h を角度 ϕ だけ回転して長さを $\sqrt{p^2 + q^2}$ したものである。

一般に、 $ad - bc \neq 0$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して、1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じ、角度が保存されないこともある) が、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形の 1 次変換は **正方形を正方形に写す** (歪まず、角度は保存される)。

以上のように考えても、等角性が成り立つことが分かる。

2.5.5 逆関数定理

定理 2.12 (正則関数の逆関数定理 (弱い形)). f が正則で、 f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、 c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

略証 微積分に「逆関数定理」がある。 f が C^1 級で、 $\det f'(c) \neq 0$ ならば、 c を含む十分小さな開集合 $\tilde{U}$ では f は単射で、 f を $\tilde{U}$ に制限した写像

$$f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \ni x \mapsto f(x) \in f(\tilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する f については (c に十分近い任意の $\tilde{c}$ に対して、 $f'(\tilde{c}) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) において)

$$\det f'(\tilde{c}) = |f'(\tilde{c})|^2 \neq 0, \quad (f'(\tilde{c}))^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する f の局所的逆関数 $(f|_U)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

ゆえに $(f|_U)^{-1}$ は正則関数である。

□

注 後で「 f が正則ならば、 f は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「 f' が連続」を入れる必要はなくなる (強い形の逆関数定理が得られる)。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014～).