

複素関数・同演習 第 6 回

～複素関数の極限・連続性～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 10 月 13 日

目次

0	本日の内容・連絡事項	1
2	複素関数とその極限、連続性、正則性	2
2.1	複素関数の実部・虚部	2
2.1.1	定義	2
2.1.2	例	2
2.2	良く使う記号・用語 (極限に向けて)	3
2.3	極限, 連続性	4
2.3.1	定義	4
2.3.2	実関数の極限・連続性への翻訳	4
2.3.3	複素関数の和・差・積・商の極限・連続性	5
2.4	微分、正則性	6
2.4.1	定義	6
2.4.2	例	6
2.4.3	微分可能な関数の和・差・積・商	7
2.4.4	多項式と有理関数の正則性	7
2.4.5	合成関数の微分法と逆関数の微分法	7
2.5	Cauchy-Riemann の方程式	8
2.5.1	微分可能性の必要十分条件	8
2.5.2	正則関数が定数となる場合	10
	参考文献	12

0 本日の内容・連絡事項

- ・講義ノート [1] の第 2 章に入る。ここからは新しく学ぶものばかり、と考えて下さい。
- ・宿題 3 を出す (メ切は 10 月 20 日 13:30)。

2 複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1 複素関数の実部・虚部

2.1.1 定義

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 2.1 (複素関数の実部・虚部). $\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の**実部** u , **虚部** v を

$$(1) \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}).$$

で定める。ただし

$$(2) \quad \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

$u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\tilde{\Omega}$ の図を描いて説明する。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実 2 変数の関数のそれと同じである (数学解析等を復習すると良い。例えば桂田 [2] を見よ。)

同じであっても省略せずに (すぐ後に) 説明するが、まずは実部・虚部を求める練習をしよう。

2.1.2 例

例 2.2. (1) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}, \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

(2) $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$)

$$f(x + yi) = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

例 2.2 (つづき). (3) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x + yi) = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

次回、任意の正則関数 f の実部・虚部 u, v について、Cauchy-Riemann 方程式と呼ばれる微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことを証明する。上にあげた例で、この方程式が成り立つことは容易に確認できる。□

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、 a 中心, 半径 r の開球を $B(a; r)$ と書いた)。

(1) $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して

$$D(c, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$

c を中心とする半径 r の開円盤 (an open disk, 開円板) とよぶ。

(2) $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

とおき、 Ω の閉包 (the closure of Ω) とよぶ。

(3) $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

- Ω が $\mathbb{C}$ の開集合 (open set) とは、

$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z; \varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

- Ω が $\mathbb{C}$ の閉集合 (closed set) とは、 Ω の補集合 $\Omega^c = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \Omega\}$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることをいう。

2.3 極限, 連続性

2.3.1 定義

定義 2.3 (複素関数の極限、連続性). $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

(1) $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。 $z \rightarrow c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \rightarrow \gamma$ と表す。この条件はつぎのようにも書ける。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega) \quad (|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \varepsilon).$$

(このような γ は存在すれば一意なので) γ を $f(z)$ の $z \rightarrow c$ のときの**極限** (the limit) とよび、 $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ で表す。

注意 $z \rightarrow c$ のとき $f(z) \rightarrow \gamma$ となることを

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : 0 < |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義している本が多い。この講義では、杉浦 [3] の定義に従う。

定義 2.3 (複素関数の極限、連続性 (つづき)). $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

(2) $c \in \Omega$ とする。 f が c で**連続**であるとは

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。 ε - δ 論法で表すと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

(3) f が Ω で**連続**とは、 f が Ω の任意の点 c で連続なことをいう。

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$\begin{aligned} x &:= \operatorname{Re} z, & y &:= \operatorname{Im} z, & z &:= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \alpha &:= \operatorname{Re} \gamma, & \beta &:= \operatorname{Im} \gamma, & \gamma &:= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \\ a &:= \operatorname{Re} c, & b &:= \operatorname{Im} c, & c &:= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi), \quad \mathbf{f}(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow c} \mathbf{f}(z) = \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = \alpha \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x, y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

$$f \text{ が } c \text{ で連続} \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ が } c \text{ で連続} \Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ が } (a, b) \text{ で連続.}$$

「 c で」を「 Ω で」、「 c で」と「 (a, b) で」を「 $\tilde{\Omega}$ で」に変えても成立する。ただし、 $\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$ 。

例 2.4. 指数関数 $f(z) = e^z$ については、実部 $u(x, y) = e^x \cos y$ 、虚部 $v(x, y) = e^x \sin y$ が $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で連続である。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 2.5 (複素関数の和・差・積・商の極限). $\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が $z \rightarrow c$ のとき極限を持つとき、

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow c} (f(z) + g(z)) &= \lim_{z \rightarrow c} f(z) + \lim_{z \rightarrow c} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow c} (f(z) - g(z)) &= \lim_{z \rightarrow c} f(z) - \lim_{z \rightarrow c} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow c} (f(z)g(z)) &= \lim_{z \rightarrow c} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow c} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow c} f(z)}{\lim_{z \rightarrow c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z \rightarrow c} g(z) \neq 0 \text{ とする}). \end{aligned}$$

証明 (方針のみ) 微積分で実多変数関数の場合の命題を学んでいると思う。それらと同様に証明できる。

別証明 (方針のみ) 対応する実2変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。例えば、 $f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、

$fg = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_3 + iv_3$ より $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、 u_3 と v_3 は、 u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積で出来ているので収束する。ゆえに fg は… □

系 2.6. 連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \text{ は複素数の定数})$$

に対して多項式関数 $P: \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

複素係数の有理式

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z], p(z) \neq 0)$$

に対して、有理関数 $r: \Omega \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ は連続である。

2.4 微分、正則性

2.4.1 定義

定義 2.7 (微分可能, 正則). 簡単のため、 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。 f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このとき、この極限を $f'(c)$ と表し、 f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。

導関数 (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、 f が z で微分可能であるとき、 f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2 例

例 2.8 (正則な関数の例). $f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、 $\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

であるから、 f は z で微分可能で $f'(z) = 0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

また

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

であるから、 g は z で微分可能で $g'(z) = 1$. g は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 2.9 (微分可能な関数の和・差・積・商). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $c \in \Omega$ とする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ と $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、 $f+g$, $f-g$, fg , $\frac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned}(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c), \\ (f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c), \\ (fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.\end{aligned}$$

証明 実関数の場合と同様である。 □

2.4.4 多項式と有理関数の正則性

系 2.10 (多項式と有理関数の正則性). (1) 任意の自然数 k に対して、 $f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、 $f'(z) = kz^{k-1}$.

(2) 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(2 つめの等式がすらすら導けるように。「 $k-1=j$ とおくと…」)

(3) 任意の複素係数有理式 $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない) の定める関数 $r: \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

合成関数の微分法 f と g が合成可能で、 f が c で、 g が $f(c)$ で微分可能ならば、 $g \circ f$ は c で微分可能で

$$(3) \quad (g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

あるいは $w = f(z)$, $\zeta = g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta = g(f(z))$ について

$$(4) \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dw} \frac{dw}{dz}.$$

逆関数の微分法 関数 $w = f(z)$ が微分可能かつ全単射であるとき、逆関数 $z = f^{-1}(w)$ について

$$(5) \quad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz \neq 0 \text{ とする})$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

2.5 Cauchy-Riemann の方程式

2.5.1 微分可能性の必要十分条件

定理 2.11 (複素関数が微分可能 $\Leftrightarrow$ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とする。 f が c で微分可能であるためには、 f の実部 u と虚部 v が (a, b) で (全) 微分可能でかつ

$$(\star) \quad u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b)$$

を満たすことが必要十分である。

($\star$) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u , 虚部 v は、 $u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

例 2.12 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る). 正則な $f(z) = z^2$ ($z \in \mathbb{C}$), $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $f(z) = e^z$ ($z \in \mathbb{C}$) などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを確かめてみよう。

例 2.13 (微分可能でないことの証明に使ってみる). $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$ (以上は $\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z) = \operatorname{Arg} z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $f(z) = \log |z|$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) は任意の z に対して、 z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z) = \log |z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, 虚部 $v(x, y) = 0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ゆえに $u_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $v_x(x, y) = 0$, $v_y(x, y) = 0$. $x \neq 0$ であれば $u_x \neq v_y$, $y \neq 0$ であれば $u_y \neq -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

以上より、任意の点 (x, y) において、「 u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。□

定理 2.11 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) で微分可能ならば、 u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\sharp) \quad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b))$$

が成り立つ。

特に実部・虚部を比較して $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$.

(($\sharp$) を $f' = f_x = \frac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが¹⁾ 分かりやすいかも。)

証明 f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、 $h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。 (次のスライドに続く)

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)

$f(c+h_x) = u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \rightarrow 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) = u_x(a, b) + iv_x(a, b). \end{aligned}$$

(b) $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)

$f(c+ih_y) = u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_y \rightarrow 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{(u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{ih_y} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_y \rightarrow 0} \left(\frac{u(a, b+h_y) - u(a, b)}{h_y} + i \frac{v(a, b+h_y) - v(a, b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)). \end{aligned}$$

以上から

$$f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} [u_y(a, b) + iv_y(a, b)] = v_y(a, b) - iu_y(a, b).$$

1) うるさく言うと、 f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、 f_x, f_y という書き方は変である。

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad v_x(a, b) = -iu_y(a, b). \quad \square$$

定理 2.11 の証明 f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

$h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) とおくと

$$f(c+h) - f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) + i(v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b)),$$

$$(p+iq)h = (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\ &= \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|} \\ &= \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|. \end{aligned}$$

ゆえに

f が c で微分可能

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\text{かつ} \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u \text{ と } v \text{ は } (a, b) \text{ で (全) 微分可能で}$$

$$u_x(a, b) = p, \quad u_y(a, b) = -q, \quad v_x(a, b) = q, \quad v_y(a, b) = p$$

$$\Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ は } (a, b) \text{ で (全) 微分可能で } u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b). \quad \square$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 「正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である」を紹介する。

これを使うと、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \operatorname{Arg} z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

その定理の証明の準備をする。次の問を考えてみよう。

問 $f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答 無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「 $f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

$$\text{反例: } I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

もしも I が区間ならば、 f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。

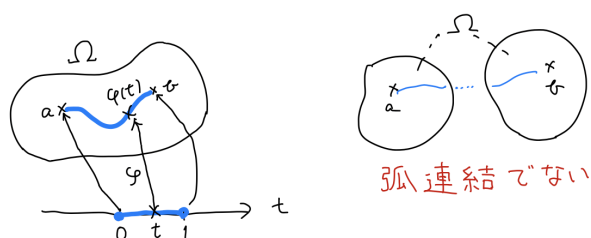
定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合も、同様のことをしたければ、(弧) 連結性の概念が必要になる。

定義 2.14 (弧連結, 領域). $\Omega \subset \mathbb{R}^{\ell}$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が **弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、 Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、 Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ で、 $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、 Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を **領域** (region) と呼ぶ。



直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、 Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを **弧連結成分** と呼ぶ。

注意 2.15 (上の定義は実は普通でない). 普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- $\mathbb{R}^{\ell}$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

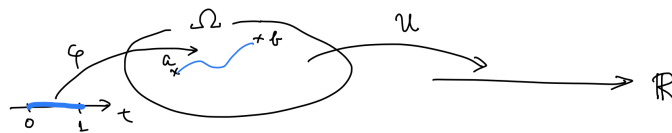
$\mathbb{R}$ の部分集合 I について、 I が区間 $\Leftrightarrow I$ は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、 Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、 C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 2.16 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である). Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域 (連結な開集合)、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、 $u' = 0$ を満たすならば、 u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明 任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ が存在して、 φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、 $F(t) := u(\varphi(t))$ ($t \in [0, 1]$) とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)

以上より u は Ω 全体で定数関数である。 □

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014~).
- [2] 桂田祐史：数学解析, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年~).
- [3] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 微積分の重積分・級数までの詳しい解説 (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843> でアクセスできる。
 この eBook まともな目次を付けてほしい。