

複素関数・同演習 第 5 回

～ n 乗根 (やり残し), 複素関数の実部・虚部 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 10 月 7 日, 2026 年 10 月 13 日

目次

0	本日の内容・連絡事項	1
1	複素数の定義と基本的な性質 (続き)	2
1.11	n 乗根 (続き)	2
1.11.1	定義と極形式表示 (再掲)	2
1.11.2	± 1 の n 乗根	3
1.11.3	よくあるよくない解答	6
1.11.4	補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について	7
1.11.5	余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)	8
1.11.6	余談 2: $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めて	8
1.11.7	遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く	8
1.12	$\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束	9
2	複素関数とその極限、連続性、正則性	10
2.1	複素関数の実部・虚部	10
2.1.1	定義	10
2.1.2	例	10
	参考文献	11

0 本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §1.11, 1.12 を解説する。 n 乗根の計算は (特に $1, -1$ の n 乗根について) きちんとマスターすること。
- それが終わり次第第 2 章に入る。ここからは新しく学ぶものばかり、と考えて下

さい。

- 宿題 2 を出します (締め切りは 10 月 13 日 13:30。「複素関数演習」のレポートを見て下さい。)

1 複素数の定義と基本的な性質 (続き)

1.11 n 乗根 (続き)

1.11.1 定義と極形式表示 (再掲)

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 1.11 (n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$(1.1) \quad z^n = c$$

を満たす z を c の n 乗根 (an n -th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき **平方根** (square root)、 $n = 3$ のとき **立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、 c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく 複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{}$ で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の n 乗根は、 n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。例えば 3 乗根を求めるために $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとしても行き詰まる。□

その他 ^{べきこん} **冪根**, ^{るいじょうこん} **累乗根** という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。□

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 1.12 (複素数の n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

$$(1.2) \quad c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とおくとき、 c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$(1.3) \quad \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望まし

い (ちゃんと出来ない人がとても多い)。

(証明は前回やったので今回は省く。)

問 $\sqrt[n]{\rho}$ は何であるか、説明せよ。(ヒント: $y = x^n$, $y = \rho$ のグラフを考える。)

系 1.13 (1 の n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

の n 個である。これらは、 $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

(直接証明も簡単。 n 乗すると 1 になり、全部で n 個。 n 次方程式なので解のすべて。)

これから

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega) \cdots (z - \omega^{n-1}).$$

また定理 1.12 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

これは意味が鮮明 ($\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}}$ は n 乗すると確かに $c = \rho e^{i\phi}$. それに ω^k がかかっている)。

特に -1 の n 乗根は、 $e^{i\frac{\pi}{n}} \omega^k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) と表せる。 ω は便利である。

平方根の定理と n 乗根の定理を比較する。

- 平方根は “2 乗根” なので、カバーする範囲は後者が広い。
- 前者は、 c の実部・虚部から平方根の実部・虚部を得る。 $\sqrt{\text{非負実数}}$ を用いる。
- 後者は、 c の極形式から n 乗根の極形式を得る。

(実部・虚部から偏角を求めるには逆三角関数が、極形式から実部・虚部を求めるには三角関数が必要になる。

2026/10/7 の講義はこの辺からです。

1.11.2 ± 1 の n 乗根

良い計算練習になるので、 n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。 $z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、 $z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n})} = e^{i\frac{k2\pi}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、 $z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$

このように極形式で表すことは、定理 1.12 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n = 2$ のとき。

$z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k \frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ ($k = 0, 1$) であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.

これは

$$z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$$

と因数分解できることから分かる。

$z^2 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{2})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{2}}$ ($k = 0, 1$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

これは

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

と因数分解できることから分かる。

2. $n = 3$ のとき。

$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

一方、

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ と求まるから)

$$z^3 - 1 = (z - 1) \left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

$z^3 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

また因数分解も上と同様に

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = (z + 1) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

• $n = 4$ のとき。

$z^4 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

因数分解からも分かる。実際

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

$z^4 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{4})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{4}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

一方、

$$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i).$$

と因数分解して、 $z^2 = -i$, $z^2 = i$ を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、
 そうするよりも

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) \end{aligned}$$

と因数分解すれば、2つの2次方程式の根として簡単に求まる。

$$z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} \quad (\text{上の結果と一致}).$$

(3) $n = 5$ のとき。

$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

(以下の計算に注目)

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$X = z + \frac{1}{z} \text{ とおくと、 } X^2 + X - 1 = 0 \text{ で、この解は } X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 + (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 + (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = 1, \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

一方、 $z^5 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}} = -1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 - X - 1 = 0$ で、この解は $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 - (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0.$$

ゆえに

$$z = -1, \frac{(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n = 5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ の $\cos, \sin$ が求まるのは注目に値する。)

- $n = 6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n = 7$ のとき。

$z^7 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}}, e^{i\frac{12\pi}{7}}$.

$z^7 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$.

これらは (1, -1 を除いて)、 $\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n = 8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。

□

1.11.3 よくあるよくない解答

(これは 2026/10/6 の段階で時間の穴埋めで説明した。)

この講義では、 n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「 $z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i \cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので (「行間を埋められますか?」と尋ねたくなる) 非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

1.11.4 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、まとめておく。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、 $x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

$c < 0$ のときは? $n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-ci}$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似(?) をして、 $\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、 $\sqrt[n]{c}$ が、 c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt[n]{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。 $\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2 次方程式の解の公式を使う場合、 $(\pm\sqrt{D})$ の形なので) どのルールでも問題ない。

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ に対する Cardano の公式

$$(1.4) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \Delta := -(27q^2 + 4p^3)$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p, q \in \mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta \leq 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない (ことが分かる)。

$\Delta > 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1.4) に 2 つある $\sqrt[3]{}$ の値は、 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{}} = -\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、 x は 3 次方程式の解にならない。それを考えると、(1.4) はむしろ

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない (もちろん $\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{}$ とする)。

p, q が虚数の場合も、 $\sqrt[3]{}$ の値の選択をきちんとすれば、(1.4) の x は解となる。

以下の余談等は講義ではスキップして、1.12 に飛んだ。

1.11.5 余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、[定木とコンパスによる正 \$n\$ 角形の作図](#)と関係がある。

Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、 n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、 $n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。

つまり正 17 角形は作図可能である¹⁾。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。 $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、 F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707–1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$ □

定規とコンパスで任意の角の二等分ができるので 2^k がつくが、任意の角の三等分は出来ないので、2 つ以上の 3 があったら出来ない。

1.11.6 余談 2: $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めて

高校で、 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の $\sin, \cos$ の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、 $36^\circ, 72^\circ$ の $\sin, \cos$ の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、 ± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、 $18^\circ, 15^\circ$ の $\sin, \cos$ も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、 $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の $\sin, \cos$ も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の $\sin, \cos$ はどうだろう？もしこれが $\sqrt{\quad}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の $\sin, \cos$ が $\sqrt{\quad}$ で表される。

この問題は、「[角の三等分](#)」とも関係があり、(結論を天下一りに述べると) 1° の $\sin, \cos$ を $\sqrt{\quad}$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・[天文学者](#)) は、3 次方程式 $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ に注意)、 $\sin 1^\circ$ を求めた (カツツ [4])。

1.11.7 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。 $z^3 = i$ を解くには

$$1) \quad \cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right) = 0.932472229404355 \dots$$

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x + yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{}$ で表せる ($z = -i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。

ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{}$, $\sqrt{}$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、 $z^{17} = 1$ を $\sqrt{}$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]
```

```
ToRadicals[%]
```

(怖いもの見たい人はやってみましょう。)

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか?)

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか?

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```

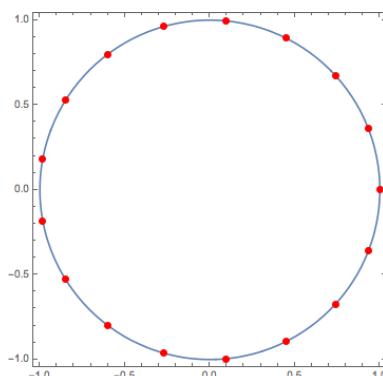


図1 $z^{17} = 1$ の解を図示

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ と同じ。

複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。 $\mathbb{R}^2$ については「知っている」ことになっているので、 $\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) となる x, y を取って、 $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $z \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

これから、 $\mathbb{C}$ における 2 点の距離と、 $\mathbb{R}^2$ における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_n := \operatorname{Im} z_n, \quad \mathbf{z}_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\{\mathbf{z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の点列, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ であり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_n - \mathbf{c}| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{c} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{aligned}$$

2026/10/7 の講義はここまでです。

2 複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1 複素関数の実部・虚部

2.1.1 定義

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 2.1 (複素関数の実部・虚部). $\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の**実部** u , **虚部** v を

$$(2.1) \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}).$$

で定める。ただし

$$(2.2) \quad \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

$u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\tilde{\Omega}$ は図を描いて説明すること。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実 2 変数の関数のそれと同じである (数学解析を復習すると良い。桂田 [5] を見よ。)

2.1.2 例

例 2.2. (1) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}, \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

(2) $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$)

$$f(x + yi) = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

(3) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x + yi) = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

□

次回、任意の正則関数 f の実部・虚部 u, v について、Cauchy-Riemann 方程式と呼ばれる微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことを証明する。上にあげた例で、この方程式が成り立つことは容易に確認できる。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014～).
- [2] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく：正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ, 数学書房 (2017/5/15).
- [4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史, 共立出版 (2005), 上野 健璽・三浦伸夫 監訳, 中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathematics, A: An Introduction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).
- [5] 桂田祐史：数学解析, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).