

複素関数・同演習 第 4 回

～複素指数関数 (やり残し), 極形式, n 乗根～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 10 月 6 日, 2026 年 10 月 13 日

目次

0	本日の内容・連絡事項	1
0.1	本日の内容	1
0.2	宿題について	2
1	複素数の定義と基本的な性質 (続き)	2
1.8	複素指数関数 (続き)	2
1.9	極形式	3
1.9.1	定義	3
1.9.2	偏角	3
1.9.3	極形式と偏角の例	4
1.10	演算の幾何学的解釈	6
1.10.1	和と積	6
1.10.2	原点の周りの回転	6
1.11	n 乗根	7
1.11.1	定義と極形式表示	7
	参考文献	9

0 本日の内容・連絡事項

0.1 本日の内容

- 宿題の提出率は 81% … $\times$ 切まで後 1 時間だけど。解答 PDF を公開するつもりだったけれど、初回だし、もう一日待つかなあ。

- 本日は、複素指数関数について前回の残りど、それから極形式、 n 乗根の話をしてします (これで高校数学は終わりかな)。講義ノート [1] の §1.9~1.11 の内容を解説する。

0.2 宿題について

- テストをしているつもりはないので、気軽に質問して下さい。また (答えの丸写しはまずいけれど) 友人同士で相談しても構いません。「学習相談」というものもある (月曜 10:30~12:30, 火曜 12:30~14:30, 水曜 11:30~13:30, 1 階ラーニングラウンジ内の学習支援コーナー)。
- 「この科目の TA に質問できる？」TA には宿題の 1 次チェックをやってもらっている。質問は学習相談ですか、私相手にすること。
- 宿題 1 は単純な計算なので、WWW で解答を公開する。フィードバックは…

1 複素数の定義と基本的な性質 (続き)

1.8 複素指数関数 (続き)

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ を、 $\cos \theta, \sin \theta$ についての連立方程式として解くと

$$(1.23) \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

絶対値については、 $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x$ であるから

$$(1.24) \quad |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

(板書を間違えたかもしれない。念のため書く次第。)

$$(1.25) \quad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}).$$

実際、 $n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。 $n \in \mathbb{N}$ の場合は、一般に

$$e^{z_1+z_2+\dots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \dots e^{z_n}$$

が成り立つことから、 $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、 $n = -m$ とすると、 $e^{nz} = e^{-mz} = \frac{1}{e^{mz}} = \frac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. $\square$

特に $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. すなわち

$$(1.26) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{ド・モアブルの公式}).$$

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と本質的に同じ証明である。)

注意 1.1 (一般の冪). 一般の冪 a^b はまだ定義していない (しばらく待って下さい)。実は $(a^b)^c = a^{bc}$ の形の指数法則は一般には成り立たない。(1.25) は、その形の指数法則とはみなさない方がよい。□

1.9 極形式

1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

が成り立つ。この r, θ を (x, y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- θ は、 $r > 0$ のとき (いいかえると $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。 $r = 0$ のとき、 θ は何でもよい。
 $0 \leq \theta < 2\pi$ や $-\pi < \theta \leq \pi$ のように条件をつけると (もっと一般に、任意に選んだ α に対して、 $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ あるいは $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ という条件を課すと)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っている (はずの) こと。

$z \in \mathbb{C}$ とすると、

$$(1.27) \quad (\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

この式 ($z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ あるいは $z = re^{i\theta}$) を z の**極形式**という。なるべく後者を使うこと (慣れて欲しいから、その方が誤解を招きにくいから)。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、 $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、 θ は 2π の不定差を除いて定まる。 θ を z の**偏角** (an argument of z) とよび、 $\arg z$ と表す。

1つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ1つに定まる。それを $\text{Arg } z$ と書き、 z の**偏角の主値** (the principal argument of z) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$(1.28) \quad r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi.$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ とも表せる。

(1.28) の証明 $\Leftarrow$ は当たり前。 $\Rightarrow$ はまず絶対値を取って $r_1 = r_2$. それを代入して割り算して $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. これから $(\exists k \in \mathbb{Z}) \theta_1 - \theta_2 = k \cdot 2\pi$. $\square$

注意 1.2. 何か 1 つに値を選ぶ方法には、主値以外にも色々ある。大抵は、 $\alpha \in \mathbb{R}$ を定めて、偏角を $(\alpha, \alpha + 2\pi]$ から選ぶ、あるいは $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ から選ぶようにする。例えば主値は、 $\alpha = -\pi$ で後者、つまり $(-\pi, \pi]$ から選んでいる。

主値以外では、 $[0, 2\pi)$ から選ぶことが多い。 $\square$

合同式のおさらい (?) 偏角は合同式で考えよう

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、 a と b は m を法として合同である (a and b are congruent modulo m , a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

1.9.3 極形式と偏角の例

例 1.3. 以下の z_j の極形式と $\text{Arg } z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_4 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、 $|z_j| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

$$z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{3},$$

以下同様に

$$z_2 = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_2 = \frac{2\pi}{3},$$

$$z_3 = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_3 = -\frac{2\pi}{3},$$

$$z_4 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_4 = -\frac{\pi}{3}.$$

例 1.4. 以下の z_j の極形式と $\text{Arg } z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_4 = 1 - i.$$

(まずは絶対値の計算から始める。) どの j についても、 $|z_j| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}$$

($\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ を探した。)

以下同様に

$$z_2 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_2 = \frac{3\pi}{4},$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_3 = -\frac{3\pi}{4},$$

$$z_4 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_4 = -\frac{\pi}{4}. \quad \square$$

注意 1.5 (期末試験間違いコレクションから). $-1 + \sqrt{3}i$ の極形式は? 答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

なぜ? 正しい等式であるが、 $\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが2つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、 $\bar{z}$ の極形式は? $\bar{z} = re^{-i\theta}$. これは OK.

しかし

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

は極形式として正しい。

ということもあって、極形式の三角関数バージョンは避けよう、と言ってます。

例題 $r, \theta \in \mathbb{R}, z = re^{i\theta}$ とするとき、 z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答 $r \geq 0$ の場合は、 $z = re^{i\theta}$ は z の極形式である。

$r < 0$ の場合は、 $r = (-r) \cdot (-1) = (-r)e^{i\pi}$ であるから

$$z = re^{i\theta} = (-r)e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$$

であり、 $-r > 0, \theta + \pi \in \mathbb{R}$ であるから、 $z = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$ が z の極形式である。 □

1.10 演算の幾何学的解釈

1.10.1 和と積

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

積は極形式と相性が良い。積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和。

(本当は「偏角の和は積の偏角である」とすべき。)

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_1, r_2 > 0; \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

これが $z_1 z_2$ の極形式である。

ゆえに

$$(1.29) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$(1.30) \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (\text{要注意の式}).$$

第2式は注釈が必要。arg は1つの数を表すのではないことに注意する。これは

$$(1.31) \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

のように、すなわち、

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \arg(z_1 z_2) - (\arg z_1 + \arg z_2) = 2k\pi.$$

と解釈すべきである (「 2π の整数倍の差を除いて一致する」)。

例えば

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$$

ははっきり間違いである ($-\pi < \text{Arg} \leq \pi$ に注意)。これも

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \equiv \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \pmod{2\pi}$$

は正しい。

1.10.2 原点の周りの回転

特に $e^{i\theta}$ をかけると、複素平面で原点を中心とする角度 θ の回転をすることになる。

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とするとき

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z &= e^{i\theta} (x + yi) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + yi) \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta + (x \sin \theta + y \cos \theta)i. \end{aligned}$$

Cf. (行列を用いた回転)

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.11 n 乗根

1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 1.11 (n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$(1.32) \quad z^n = c$$

を満たす z を c の n 乗根 (an n -th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき平方根 (square root)、 $n = 3$ のとき立方根 (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、 c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく 複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{}$ で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の n 乗根は、 n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。例えば 3 乗根を求めるために $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとしても行き詰まる。

その他 ^{べきこん} 冪根, ^{るいじょうこん} 累乗根 という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 1.12 (複素数の n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

$$(1.33) \quad c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とおくとき、 c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$(1.34) \quad \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい (ちゃんと出来ない人がとても多い)。

問 $\sqrt[n]{\rho}$ は何であるか、説明せよ。(ヒント: $y = x^n$ のグラフを考える。)

証明 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow (r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}).$$

(注 $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n = \rho$ を得るのが $\Rightarrow$ のポイント。)

$\rho > 0, r > 0$ に注意すると、 $r^n = \rho \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ が分かる。もう一方から

$$\begin{aligned} e^{in\theta} = e^{i\phi} &\Leftrightarrow n\theta \equiv \phi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad n\theta - \phi = k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z^n = c &\Leftrightarrow \left(r = \sqrt[n]{\rho} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad z = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n})}. \end{aligned}$$

(一見無限個の解があるように思うかもしれないが) k が n 増えると元に戻る (周期 n) ので、 $k = 0, 1, \dots, n-1$ だけで重複なく、漏れもない。 $\square$

2026/10/6 の講義はここまでです。

余談 1.13 (別証明). (答えを知っていれば、手短な議論が出来る。)

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

はいずれも $z^n = \rho e^{i\phi}$ を満たす。また、これらは $\rho > 0$ のとき相異なる。複素係数の多項式についても因数定理が成り立つので (一般に可換体の要素を係数とする多項式について因数定理が成り立つ)、 n 次方程式は $n+1$ 個以上の解は持たない。ゆえに、これらが $z^n = \rho e^{i\phi}$ のすべての解である。 $\square$

系 1.14 (1 の n 乗根). $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

の n 個である。これらは、 $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega) \cdots (z - \omega^{n-1}).$$

また定理 1.12 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

特に -1 の n 乗根は、 $e^{i\frac{\pi}{n}} \omega^k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) と表せる。 ω は便利である。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014～).