複素関数・同演習 宿題 No. 7 (2024 年 11 月 13 日出題, 11 月 19 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 7　(1), (2) は等比級数の和の公式を利用して解答すること。

(1) 次の各関数を 0 のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ。

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$　(b) $g(z) = \dfrac{5}{3z+4}$　(c) $h(z) = \dfrac{1}{(6z+7)^2}$

(d) $\varphi'(z) = \dfrac{1}{9-z}$, $\varphi(0) = 8$ を満たす φ　(e) $r(z) = \dfrac{6z^4+19z^3-21z^2-26z+37}{z^3+2z^2-7z+4}$

Mathematica で `Apart[ (6z^4+19z^3-21z^2-26z+37) /(z^3+2z^2-7z+4)]` として部分分数分解できる。(自分で部分分数分解して、検算してみること)

(2) $F(z) = \dfrac{1}{2+3z}$ を 4 のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問 7 解説　「冪級数展開し」なのだから、冪級数の形 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n)$ に変形することを求められているのに、最後がその形になっていない人が結構いた。例えば $\left(-\frac{3}{4}z\right)^n$ は、$\frac{(-3)^n}{4^n}z^n$ あるいは $\left(-\frac{3}{4}\right)^n z^n$ のようにして、a_n と $(z-c)^n$ が混じらないようにすべき。$\left(\frac{1}{6z+7}\right)' = ((6z+7)^{-1})' = \frac{-6}{(6z+7)^2}$ の 6 を見落とす人が多かった。

問 7 解答

(1) 以下、収束半径を ρ と表す。

(a) (最初の問題なので、ゆっくり変形する。慣れたら適宜スキップすれば良い。)

$$f(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2(1+z/2)} = \frac{1}{2\left[1-(-z/2)\right]} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$ であるから、$\rho = 2$.

(b)

$$g(z) = \frac{5}{3z+4} = \frac{5}{4+3z} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1+3z/4} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3z}{4}\right)} = \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot(-3)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |-3z/4| < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{4}{3}$ であるから、$\rho = \frac{4}{3}$.

(c)

$$\frac{1}{6z+7} = \frac{1}{7(1+\frac{6}{7}z)} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{6}{7}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^n}{7^{n+1}}z^n.$$

これは等比級数であるから、収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |-6z/7| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{7}{6}$. ゆえに、この冪級数の収束半径は $\frac{7}{6}$. (任意の) 冪級数は収束円の内部で項別微分が出来るから

$$-\frac{6}{(6z+7)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{7^{n+1}}nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^{n+1}}{7^{n+2}}(n+1)z^n.$$

ゆえに

$$h(z) = -\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^{n+1}}{7^{n+2}}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^n}{7^{n+2}}(n+1)z^n.$$

冪級数は項別微分しても収束半径は変わらないので、$\rho = \frac{7}{6}$.

(d)

$$\varphi'(z) = \frac{1}{9-z} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-z/9} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{9^{n+1}} \quad \text{(収束半径は 9)}.$$

(任意の) 冪級数は収束円の内部で項別積分できることと、$\varphi(0) = 8$ であることから

$$\varphi(z) = 8 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)9^{n+1}} = 8 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{9^n n}.$$

冪級数は項別積分しても収束半径は変わらないので、$\rho = 9$.

(e) $r(z)$ を部分分数分解する。その計算は後回しにして、結果を書くと

$$r(z) = 7 + 6z + \frac{5}{z+4} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

$a \neq 0$ に対して、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - z/a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} z^n.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$. ゆえに

$$\frac{1}{z+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 4).$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1).$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (\text{収束半径} = 1).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
r(z) &= 7 + 6z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}} z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1) z^n \\
&= 7 + 6z + \frac{5}{4} - \frac{5}{16} z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}} z^n - 2 - 2z - \sum_{n=2}^{\infty} 2z^n + 3 + 6z + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n+1) z^n \\
&= \frac{37}{4} + \frac{155}{16} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3n + 1 + \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}}\right) z^n.
\end{aligned}$$

(f の定義式を見て $f(0) = \dfrac{37}{4}$)
収束半径が 1, 4 の冪級数の和なので、$\rho = 1$.

$r(z)$ **の部分分数分解**　$r(z)$ の分子 $n(z) := 6z^4 + 19z^3 - 21z^2 - 26z + 37$ を分母 $d(z) := z^3 + 2z^2 - 7z + 4$ で割ると、商が $6z + 7$, 余りが $7z^2 - z + 9$. つまり

$$n(z) = d(z)(6z+7) + 7z^2 - z + 9.$$

ゆえに

$$r(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{(6z+7)d(z) + 7z^2 - z + 9}{d(z)} = 6z + 7 + \frac{7z^2 - z + 9}{d(z)}.$$

$d(z) = (z-1)^2(z+4)$ であるから

$$\frac{7z^2 - z + 9}{d(z)} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払った

$$7z^2 - z + 9 = A(z-1)^2 + B(z-1)(z+4) + C(z+4)$$

は恒等式である。

$z=1$ を代入して $15=5C$ より $C=3$.

$z=-4$ を代入して $125=25A$ より $A=5$.

最高次の係数を比較して $7=A+B$ より $B=2$.

ゆえに

$$r(z)=6z+7+\frac{5}{z+4}+\frac{2}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}$$

(2)

$$F(z)=\frac{1}{2+3z}=\frac{1}{2+3(z-4+4)}=\frac{1}{14+3(z-4)}=\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{14}(z-4)}=\frac{1}{14}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{14}(z-4)\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{14^{n+1}}(z-4)^n.$$

等比級数であるから、

$$\text{収束する}\Leftrightarrow|\text{公比}|<1\Leftrightarrow\left|-\frac{3}{14}(z-4)\right|<1\Leftrightarrow\frac{3}{14}|z-4|<1\Leftrightarrow|z-4|<\frac{14}{3}.$$

ゆえに収束円は $D\left(4;\frac{14}{3}\right)$. ■