複素関数・同演習 宿題 No. 4 (2024年10月15日出題, 10月22日13:30までにPDF形式で提出)

__年__組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4レポート用紙に書いても可)

問4 いずれも Cauchy-Riemann 方程式がテーマの問題である。(1),(2) の計算量は少ない (2行程度)。

(1) 正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$,

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

とおくと、$\det \boldsymbol{f}' = |f'|^2$ が成り立つことを示せ ($\boldsymbol{f}'$ は、$\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であり、det は行列式を意味する)。

(2) この講義では、指数関数を、$z \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (ただし $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) と定義した。$(e^z)' = e^z$ であることを示せ。(ヒント: Cauchy-Riemann 方程式を満たすことも調べよう。)

(3) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\overline{z})^2$ とするとき、f の微分可能性を調べよ。(注意: 微分可能な点も存在する。)