複素関数・同演習 宿題 No. 4 (2024 年 10 月 15 日出題, 10 月 22 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 4 いずれも Cauchy-Riemann 方程式がテーマの問題である。(1),(2) の計算量は少ない (2 行程度)。

(1) 正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$,

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

とおくと、$\det \boldsymbol{f}' = |f'|^2$ が成り立つことを示せ ($\boldsymbol{f}'$ は、$\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であり、det は行列式を意味する)。

(2) この講義では、指数関数を、$z \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (ただし $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) と定義した。$(e^z)' = e^z$ であることを示せ。(ヒント: Cauchy-Riemann 方程式を満たすことも調べよう。)

(3) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\overline{z})^2$ とするとき、f の微分可能性を調べよ。(注意: 微分可能な点も存在する。)

問4解答

(1) ヒントから

$$\det \boldsymbol{f}' = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

$f' = u_x + iv_x$ に注意すると

$$|f'|^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2.$$

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y,\ u_y = v_x$ を用いると

$$\det \boldsymbol{f}' = u_x v_y - u_y v_x = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'|^2.$$

(2) (方法1) $f(z) := e^z$ の実部 u, 虚部 v は

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

ともに $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能である。実際

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

これら偏導関数は連続である。ゆえに u, v は C^1 級であるから (全) 微分可能である[1]。

さらに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ が成り立つので、f は $\mathbb{C}$ で正則である。

先週の講義で示したように ($f' = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$ の左半分) 一般に f が微分可能ならば

$$f'(x+yi) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

が成り立つ。ゆえに

$$f'(x+yi) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(x+yi).$$

すなわち $f'(z) = f(z) = e^z$. ■

(方法2 ⋯ 意外と大変なので勧めない。大変であることを見せるために書く。) 複素指数関数についても指数法則は証明してあるので、任意の $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \frac{e^z e^h - e^z}{h} = e^z \frac{e^h - 1}{h}.$$

(この後 $\dfrac{e^h - 1}{h} \to 1$ を示すことで証明完了となるが、以下に見るように (2変数関数の極限の話なので) 意外と面倒である。冪級数について準備をすると簡単に解決するので、以下に一応書いておくが、授業では省略した。)

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと、$h \to 0$ のとき $(h_x, h_y) \to (0,0)$ である。

$$\frac{e^h - 1}{h} - 1 = \frac{1}{h}\left(e^{h_x}(\cos h_y + i \sin h_y) - 1 - (h_x + ih_y)\right) = \frac{R + iI}{h}.$$

ただし

$$R := e^{h_x} \cos h_y - 1 - h_x, \quad I := e^{h_x} \sin h_y - h_y$$

[1] 提出された答案を見ると、u, v が (全) 微分可能なことを書いてくれた人は少なかった。「f が微分可能 $\Leftrightarrow$ f の実部・虚部 u と v が全微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式を満たす。」という定理を使うので、書くべきである。

とおいた。

$$R=e^{h_x}\cos h_y-e^{h_x}+e^{h_x}-(1+h_x)=e^{h_x}(\cos h_y-1)+e^{h_x}-(1+h_x).$$

$$e^{h_x}=O(h_x),\quad \cos h_y-1=O(h_y^2),\quad e^{h_x}-(1+h_x)=O(h_x^2)\quad ((h_x,h_y)\to(0,0))$$

であるから

$$R=O\left(h_x^2+h_y^2\right)\quad ((h_x,h_y)\to(0,0)).$$

また

$$I=e^{h_x}\sin h_y-\sin h_y+\sin h_y-h_y=\left(e^{h_x}-1\right)\sin h_y+\sin h_y-h_y.$$

$$e^{h_x}-1=O(h_x),\quad \sin h_y=O(h_y),\quad \sin h_y-h_y=O(h_y^3)$$

であるから

$$I=O(h_x)O(h_y)+O(h_y^3)\quad ((h_x,h_y)\to(0,0)).$$

$$|h_xh_y|\le h_x^2+h_y^2,\quad h_y^3=|h_y|\left(h_x^2+h_y^2\right)$$

であるから

$$I=O\left(h_x^2+h_y^2\right).$$

ゆえに

$$\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right|=\frac{O\left(h_x^2+h_y^2\right)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}=O\left(\sqrt{h_x^2+h_y^2}\right)\quad ((h_x,h_y)\to(0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=e^z\cdot 1=e^z.$$

ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則であり、$(e^z)'=e^z$。■

(**注**　方法 2 の方針で、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を示すためにロピタルの定理を使ったり、Taylor 展開を使った人がいたが、微分可能であることを示すのに、微分可能であることが仮定の条件に含まれる定理を使うのは、循環論法になっておかしい。大きな勘違いであることを自覚して下さい。)

(3) (方法 1) f の実部・虚部をそれぞれ u, v とする。

$$f(x+iy)=\left(\overline{x+yi}\right)^2=x^2-y^2-2xyi.$$

であるから

$$u(x,y)=x^2-y^2,\quad v(x,y)=-2xy.$$

これらは (多項式関数であるから) $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級である。ゆえに (全) 微分可能である。

Cauchy-Riemann 方程式を満たすかチェックしよう。

$$u_x(x,y)=2x,\quad u_y(x,y)=-2y,\quad v_x(x,y)=-2y,\quad v_y(x,y)=-2x.$$

- $(x,y)=(0,0)$ のとき、$u_x=0=v_y$ かつ $u_y=0=-v_x$ が成り立つので、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。ゆえに f は 0 で微分可能である。

- $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ のとき、$x\neq 0$ または $y\neq 0$ である。$x\neq 0$ のときは $u_x\neq v_y$, また $y\neq 0$ のときは $u_y\neq -v_x$. いずれの場合も Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。ゆえに $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ において f は微分可能ではない。

  注　「f が微分可能であるためには Cauchy-Riemann 方程式が成り立つことが必要」と書いた人が多く、それは間違いではないが、$z=0$ で微分可能であることをいうには「必要性」だけでは不十分である。「必要十分」とするべき。

(方法 2) $z\in\mathbb{C}$, $h\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とするとき

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\left(\overline{z+h}\right)^2-\overline{z}^2}{h}=\frac{\overline{z}^2+2\overline{z}\overline{h}+\overline{h}^2-\overline{z}^2}{h}=\frac{2\overline{z}\overline{h}+\overline{h}^2}{h}=2\overline{z}\frac{\overline{h}}{h}+\frac{\overline{h}^2}{h}.$$

準備として

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ は存在しない。

確認

$h=h_x+ih_y$ で、$h_y=0$ として $h_x\to 0$ と近づけると $\frac{\overline{h}}{h}=\frac{h_x}{h_x}=1\to 1$, $h_x=0$ として $h_y\to 0$ と近づけると $\frac{\overline{h}}{h}=\frac{-ih_y}{ih_y}=-1\to -1$. 両者が食い違うので、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ は存在しない。

(b) 一方、$\frac{\overline{h}^2}{h}\to 0$. 実際 $\left|\frac{\overline{h}^2}{h}\right|=|h|\to 0$ $(h\to 0)$.

- $z=0$ の場合、$\displaystyle\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\overline{h}^2}{h}\to 0$ $(h\to 0)$ であるから、f は 0 で微分可能である。
- $z\neq 0$ の場合、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ は存在せず $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}^2}{h}=0$ であるから、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ は存在しない。ゆえに f は z で微分可能でない。

(この方法 2 は、(h が実数の場合、純虚数の場合と考える点で) 結局は Cauchy-Riemann 方程式の 1 つの導出法に近い。極限が存在しないことをいうだけなので、(2) よりは少し簡単になっている。)