複素関数・同演習 宿題 No. 2　(2024 年 10 月 2 日出題, 10 月 8 日 13:30 までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 2

(1) $\theta = 0, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{2\pi}{3}$ のとき、$e^{i\theta}$ の値を求めよ (実部・虚部が分かる形で表せ)。

(2) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ の極形式と、$\operatorname{Arg} z$ を求めよ。

(3) $\theta \in \mathbb{R}$, $z = -3e^{i\theta}$ の時、z, $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ の極形式を求めよ。

問 2 解説　z の極形式を求めるには、まず $|z|$ と $\dfrac{z}{|z|}$ を求め、後者が複素平面でどこにあるか (単位円周上にあるはずなわけだけど) 調べる。

(1) 単位円上の点が思い浮かぶ (描ける) ので、すぐに答えが書けるはず。

$$e^{i\cdot 0}=1,\quad e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}-i}{2},\quad e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad e^{i\frac{\pi}{2}}=i,\quad e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

(2) $z=-2-2\sqrt{3}i$ とすると、$|z|=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4.$

$$\frac{z}{|z|}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

ゆえに z の極形式は

$$z=4e^{-\frac{2\pi}{3}i}\quad (z=4e^{4\pi i/3}\text{ などでも良い}).$$

$\theta=-\frac{2\pi}{3}$ は z の偏角であり、かつ $-\pi<\theta\le\pi$ を満たすので、偏角の主値でもある。

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{2\pi}{3}\quad (\text{主値は一通りしかない。これ以外は間違い}).$$

(3) $-3=3(-1)=3e^{i\pi}$ であるから

$$\begin{aligned}
z&=-3e^{i\theta}=3e^{i\pi}e^{i\theta}=3e^{i(\pi+\theta)},\\
\overline{z}&=\overline{3e^{i(\pi+\theta)}}=\overline{3}\;\overline{e^{i(\pi+\theta)}}=3e^{-i(\pi+\theta)},\\
\frac{1}{z}&=\frac{1}{3e^{i(\pi+\theta)}}=\frac{1}{3}e^{-i(\pi+\theta)}.
\end{aligned}$$

(極形式なのでこれも他の答え方がある。$z=3e^{i(\theta-\pi)}$ とか。三角関数による答えは勧めない。) ■

z の極形式は、$z=re^{i\theta}$ $(r\ge 0,\,\theta\in\mathbb{R})$ という形の式である。(3) で $r<0$ とした人が多かったが、それは極形式とは認められない。繰り返しになるが、$r=|z|$ である。

結果を三角関数でなく、なるべく複素指数関数を使って書くように言ってある。早いところ複素指数関数に慣れるための練習用の問題だから、という理由と、その方が間違いにくい、という理由がある。途中の計算も複素指数関数を使ってやることを勧める。