

複素数と Mathematica

桂田 祐史

2015年9月28日, 2024年10月21日

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/mathematica-memo/>
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/mathematica-memo/>

色々なことをコンピューターが計算してくれる時代になった。私は、研究上で現れる問題はもちろん、授業中の計算例とか試験問題の解答の確認をするためにも、日常的にコンピューターを使っている。ゼミでも積極的にコンピューターを活用するように言っている。期末試験などでは、コンピューター持ち込み禁止としてあって、それは急には変えられないだろうが、宿題等では活用するように言っている。

実際にはコンピューターで計算するにしてもコンピューターを使いこなすには、それなりの準備(事前練習?)が必要である。

本音を言うと、必要性をこちらが説く前に、自分から興味を持って取り組んでももらいたいところ。

Mathematica のバージョンによって挙動が違うことがあるので、バージョンを添えて結果も載せた方が良いのかもしれない。

(2020/1/19) 学生で「Wolfram Alpha¹ でやっています」という人もいます。確かに、ここに載っていることくらいは、Wolfram Alpha でもやってくれるみたいだ。

1 全般的な覚え書き

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年4月末日にライセンスの更新がある(自動更新されるはずであるが、何か問題が生じて使えなくなっていた場合は、桂田か池田先生に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある(私は Dock に追加しています)。そこからならほぼ確実に起動できる。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- 忘れないように: コマンドの最後に `shift`+`↵` とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前の結果の単純化 `Simplify[%]`
- 直前のコマンドは `command`+L で呼び出せる。

¹<https://www.wolframalpha.com/>

- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- ??関数名 としてマニュアル (Documentation) が開ける (非常に便利。これに慣れること。)
- 関数名の大文字・小文字に注意する。ほぼ例外なく、先頭は大文字である。
- ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾 .nb)。
- 既存のノートブックはダブルクリックで開ける。コマンドを1つ1つ `shift`+`↵` で実行する以外に、`[評価]` → `[ノートブックを評価]` で順番に全部実行することもできる。
- 「[Mathematica 入門](#)」

2 四則など簡単な演算

虚数単位は I (大文字) で表す。実部・虚部は `Re[]` と `Im[]`, 絶対値 (absolute value) は `Abs[]`, 偏角 (argument) の主値は `Arg[]`, 共役複素数 (complex conjugate) は `Conjugate[]` で計算できる。

2005年度問 1² (1) の検算に使ってみる。

```
a=1+I
b=2+3I
a+b
a-b
a b
a/b
Abs[a]
Conjugate[a]
Arg[a]
a^4
```

注意 `a b` は `a*b` (a と b の積) を意味する。空白を省略して `ab` とすると、1つの名前になってしまう。

²<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2015/toi1.pdf>

名称未定義-1 100%

In[3]:= **a + b**

Out[3]= $3 + 4 i$

In[4]:= **a - b**

Out[4]= $-1 - 2 i$

In[5]:= **a b**

Out[5]= $-1 + 5 i$

In[6]:= **a / b**

Out[6]= $\frac{5}{13} - \frac{i}{13}$

In[7]:= **Abs[a]**
[絶対値]

Out[7]= $\sqrt{2}$

In[8]:= **Conjugate[a]**
[複素共役]

Out[8]= $1 - i$

In[9]:= **Arg[a]**
[偏角]

Out[9]= $\frac{\pi}{4}$

In[10]:= **a ^ 4**

Out[10]= -4

絶対値 名前 ▾ ↺ ⚙️ 💬

+

3 平方根の計算

$c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) が与えられた時に、 $z^2 = c$ の解を $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の形で求めることが出来る。

(複素数の平方根が、実数の $\sqrt{\quad}$ で表現できる、という定理に基づく。)

$(x + iy)^2 = a + ib$ より連立方程式

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$$

が得られるので、その実数の範囲の解を求めれば良い。

$1 + i$ の平方根を求めてみよう。

```
a=1
b=1
sol=Solve[{x^2-y^2==a,2 x y==b},{x,y},Reals]
FullSimplify[sol]

あるいは ToRadicals[sol]
```

以上は授業で説明したやり方に沿って Mathematica に仕事をさせるものだが、 z の方程式のまま解かせることも出来る (Mathematica が内部で何をしているのかは謎だけど)。

```
sol=Solve[z^2 == 1 + I, z]
sol2=ComplexExpand[sol]
ToRadicals[sol2]
```

最初に $z^2 = 1 + i$ を解かせると $z = \pm\sqrt{1+i}$ となるが、ComplexExpand[] で実部・虚部に展開させると、 $z = \pm\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ となり、ToRadicals[] で処理すると、 $z = \pm \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2^{3/4}} \right)$ となる。

名称未定義-2 100%

In[11]:= **a = 1**

Out[11]= 1

In[12]:= **b = 1**

Out[12]= 1

In[13]:= **sol = Solve[{x^2 - y^2 == a, 2 x y == b}, {x, y}, Reals]**
解く 実数領域

Out[13]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow -1.10\dots, y \rightarrow -2 \sqrt{-1.10\dots + 2 \sqrt{-1.10\dots^3}} \right\}, \left\{ x \rightarrow 1.10\dots, y \rightarrow -2 \sqrt{1.10\dots + 2 \sqrt{1.10\dots^3}} \right\} \right\}$

In[14]:= **ToRadicals[sol]**
根基で

Out[14]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, y \rightarrow 2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{3/2} \right\}, \left\{ x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, y \rightarrow -2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{3/2} \right\} \right\}$

In[15]:= **FullSimplify[sol]**
完全に簡約

Out[15]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, y \rightarrow -\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right\}, \left\{ x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, y \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right\} \right\}$

In[16]:= **sol = Solve[z^2 == 1 + I, z]**
解く 虚数単位

Out[16]= $\left\{ \left\{ z \rightarrow -\sqrt{1 + i} \right\}, \left\{ z \rightarrow \sqrt{1 + i} \right\} \right\}$

In[17]:= **sol2 = ComplexExpand[sol]**
式の展開

Out[17]= $\left\{ \left\{ z \rightarrow -2^{1/4} \cos\left[\frac{\pi}{8}\right] - i 2^{1/4} \sin\left[\frac{\pi}{8}\right] \right\}, \left\{ z \rightarrow 2^{1/4} \cos\left[\frac{\pi}{8}\right] + i 2^{1/4} \sin\left[\frac{\pi}{8}\right] \right\} \right\}$

In[18]:= **ToRadicals[sol2]**
根基で

Out[18]= $\left\{ \left\{ z \rightarrow -\frac{i \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2^{3/4}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} \right\}, \left\{ z \rightarrow \frac{i \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2^{3/4}} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2^{3/4}} \right\} \right\}$

4 実部虚部への分解

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\})$$

で定めた u, v (複素関数の実部・虚部) が必要になる場合がある。

これらを求めるには、既に紹介した `ComplexExpand[]` を用いると良い。

```
f[z_]:=z^3
ComplexExpand[f[x+I y]]

g[z_]:=Cos[z]
ComplexExpand[g[x+I y]]
```

```
sec3.nb 100%
In[34]:= f[z_] := z^3
In[35]:= ComplexExpand[f[x + I y]]
Out[35]= x^3 - 3 x y^2 + i (3 x^2 y - y^3)
In[36]:= g[z_] := Cos[z]
In[37]:= ComplexExpand[g[x + I y]]
Out[37]= Cos[x] Cosh[y] - i Sin[x] Sinh[y]
In[38]:= (* 以下はおまけ *)
In[39]:= u[x_, y_] = ComplexExpand[Re[f[x + I y]]]
Out[39]= x^3 - 3 x y^2
In[40]:= v[x_, y_] = ComplexExpand[Im[f[x + I y]]]
Out[40]= 3 x^2 y - y^3
In[41]:= u[x, y]
Out[41]= x^3 - 3 x y^2
In[42]:= v[x, y]
Out[42]= 3 x^2 y - y^3
In[43]:= D[{u[x, y], v[x, y]}, {x, y}]
Out[43]= {{3 x^2 - 3 y^2, -6 x y}, {6 x y, 3 x^2 - 3 y^2}}
以下を想定しています: 行列 | 代りに ペアのリスト として使う
表示形式 ▼ 逆 行列式 固有値 ▼ その他... [refresh] [help] [comment]
```

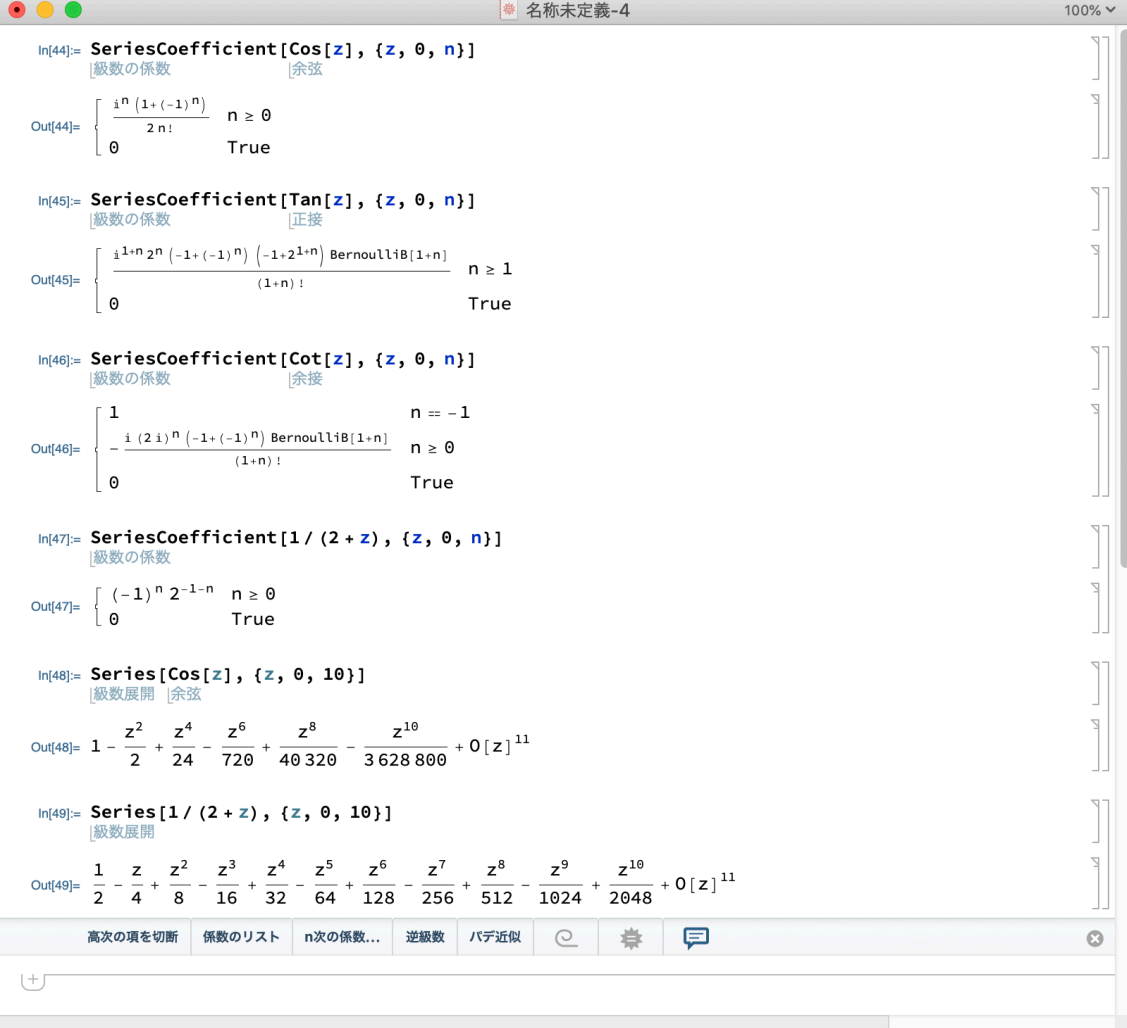
5 Taylor 展開, Laurent 展開

SeriesCoefficient[式, {z,c,n}] で、 c のまわりの冪級数展開 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ や、 c のまわりの Laurent 級数展開 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の第 n 項の係数 a_n を表示してくれる (とても便利)。

Series[式, {変数, c, n}] で、 c のまわりの Taylor 展開を第 n 項まで計算出来る。

```
SeriesCoefficient[Cos[z], {z, 0, n}]
SeriesCoefficient[Tan[z], {z, 0, n}]
SeriesCoefficient[Cot[z], {z, 0, n}]
SeriesCoefficient[1/(2+z), {z, 0, n}]
```

```
Series[Cos[z], {z, 0, 10}]
Series[1/(2+z), {z, 0, 10}]
```



The screenshot shows a Mathematica notebook window titled "名称未定義-4" with a zoom level of 100%. It displays the following input and output pairs:

- In[44]:** SeriesCoefficient[Cos[z], {z, 0, n}]
級数の係数 余弦
Out[44]:
$$\begin{cases} \frac{i^n (1 + (-1)^n)}{2^n n!} & n \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$
- In[45]:** SeriesCoefficient[Tan[z], {z, 0, n}]
級数の係数 正接
Out[45]:
$$\begin{cases} \frac{i^{1+n} 2^n (-1 + (-1)^n) (-1 + 2^{1+n}) \text{BernoulliB}[1+n]}{(1+n)!} & n \geq 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$
- In[46]:** SeriesCoefficient[Cot[z], {z, 0, n}]
級数の係数 余接
Out[46]:
$$\begin{cases} 1 & n == -1 \\ -\frac{i (2 i)^n (-1 + (-1)^n) \text{BernoulliB}[1+n]}{(1+n)!} & n \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$
- In[47]:** SeriesCoefficient[1/(2+z), {z, 0, n}]
級数の係数
Out[47]:
$$\begin{cases} (-1)^n 2^{-1-n} & n \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$
- In[48]:** Series[Cos[z], {z, 0, 10}]
級数展開 余弦
Out[48]:
$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \frac{z^{10}}{3628800} + O[z]^{11}$$
- In[49]:** Series[1/(2+z), {z, 0, 10}]
級数展開
Out[49]:
$$\frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} - \frac{z^5}{64} + \frac{z^6}{128} - \frac{z^7}{256} + \frac{z^8}{512} - \frac{z^9}{1024} + \frac{z^{10}}{2048} + O[z]^{11}$$

At the bottom of the notebook, there is a toolbar with icons for "高次の項を切断" (Cut off higher-order terms), "係数のリスト" (List of coefficients), "n次の係数..." (Coefficient of order n...), "逆級数" (Inverse series), "パデ近似" (Padé approximation), and a settings icon.

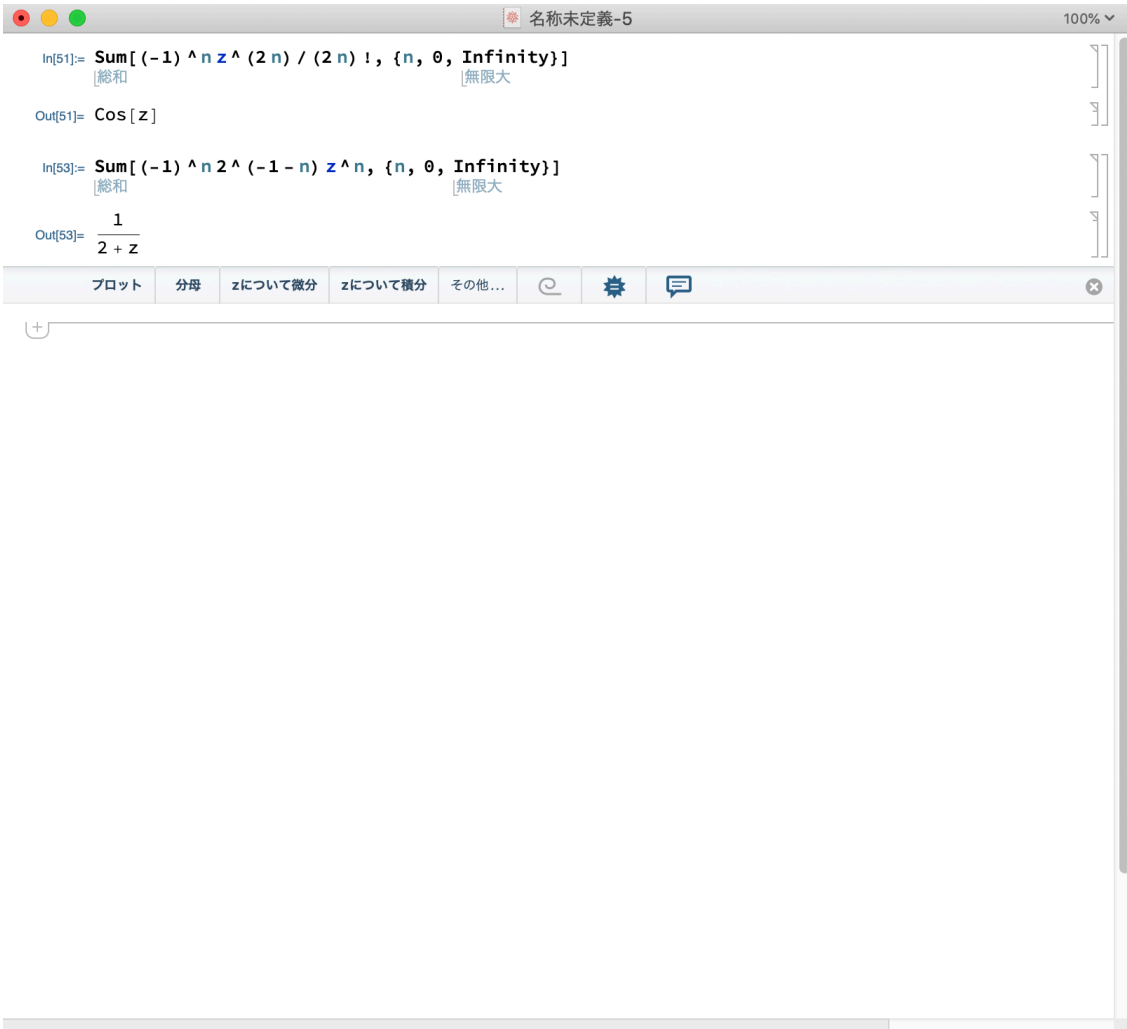
6 級数の和

Mathematica の `Sum[]` は級数の和を計算してくれる。思いの外、強力である。

```
Sum[(-1)^n z^(2n)/(2n!),{n,0,Infinity}]
```

に対して `Cos[z]` という答を返す。

Taylor 展開、Laurent 展開を計算したとき、その結果を `Sum[]` に与えることで検算が可能である。



The screenshot shows the Mathematica interface with the following content:

```
In[51]:= Sum[(-1)^n z^(2n)/(2n!),{n,0,Infinity}]
Out[51]= Cos[z]
```

The second calculation is partially visible:

```
In[53]:= Sum[(-1)^n z^(-1-n),{n,0,Infinity}]
Out[53]= 1/(2+z)
```

The interface includes a toolbar with buttons for 'プロット' (Plot), '分母' (Denominator), 'zについて微分' (Differentiate with respect to z), 'zについて積分' (Integrate with respect to z), and 'その他...' (Other...), along with navigation icons for back, forward, and search.

7 部分分数分解

有理式の部分分数への分解が必要になる場合があるが、`Apart[]` で計算できる。

```
Apart[(z^3-3z^2-z+5)/(z^2-5z+6)]
```

The screenshot shows a Mathematica notebook window titled "名称未定義-6" with a zoom level of 100%. The input cell contains the command `Apart[(z^3 - 3z^2 - z + 5) / (z^2 - 5z + 6)]` with a tooltip indicating it performs partial fraction decomposition of a rational function. The output cell displays the result: $2 + \frac{2}{-3 + z} + \frac{1}{-2 + z} + z$. Below the output is a toolbar with buttons for "プロット", "通分して約分", "zについて微分", "zについて積分", and "その他...", along with icons for undo, settings, and help.

8 応用: ある計算問題 (有理関数の Taylor 展開を求める) の答の検算

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

の 0 の周りの Taylor 展開を求めよ、という問題。

人手で解く場合は、 $f(z)$ を部分分数に分解する。そのためには、 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を $z^2 - 5z + 6$ で割りたいくなる。

```
A=z^3-3z^2-z+5
```

```
B=z^2-5z+6
```

```
f=A/B
```

```
q=PolynomialQuotient[A,B,z]
```

```
r=PolynomialRemainder[A,B,z]
```

あるいは

```
{q,r}=PolynomialQuotientRemainder[A,B,z]
```

これから商 $q = z + 2$, 余り $r = 3z - 7$ が求まる (商は quotient, 余りは remainder. polynomial は多項式という意味)。ゆえに

$$f(z) = \frac{(z+2)(z^2-5z+6) + 3z-7}{z^2-5z+6} = z+2 + \frac{3z-7}{(z-2)(z-3)}.$$

この右辺を部分分数分解しても良いが、そもそも Mathematica にやらせるのならば、最初から $f(z)$ の部分分数分解を指示してもよい。

```
Apart[r/B]
```

```
Apart[f]
```

それぞれ $\frac{2}{-3+z} + \frac{1}{-2+z}$, $2 + \frac{2}{-3+z} + \frac{1}{-2+z} + z$ となる。

結局

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

`Series[f, {z, 0, 10}]` とすると、0 の周りの Taylor 展開を 10 次の項まで求めることが出来る。

$$f(z) = \frac{5}{6} + \frac{19z}{36} - \frac{43}{216}z^2 - \frac{113}{1296}z^3 - \frac{307}{7776}z^4 - \dots (\text{途中省略}) - \dots - \frac{181243}{362797056}z^{10} + O(z^{11})$$

が得られる。series は級数という意味の英単語である。

実は、0 の周りの Taylor 展開の第 n 項は

```
SeriesCoefficient[f, {z, 0, n}]
```

で求められる (宿題の答えだけを求めるには、これ一発で OK)。

```

名称未定義-7 100%
In[55]:= A = z ^ 3 - 3 z ^ 2 - z + 5
Out[55]= 5 - z - 3 z ^ 2 + z ^ 3

In[56]:= B = z ^ 2 - 5 z + 6
Out[56]= 6 - 5 z + z ^ 2

In[57]:= f = A / B
Out[57]= (5 - z - 3 z ^ 2 + z ^ 3) / (6 - 5 z + z ^ 2)

In[58]:= q = PolynomialQuotient[A, B, z]
Out[58]= 2 + z

In[59]:= r = PolynomialRemainder[A, B, z]
Out[59]= -7 + 3 z

In[60]:= Apart[r / B]
Out[60]= 2 / (-3 + z) + 1 / (-2 + z)

In[61]:= Apart[f]
Out[61]= 2 + 2 / (-3 + z) + 1 / (-2 + z) + z

In[62]:= SeriesCoefficient[f, {z, 0, n}]
Out[62]= { 19/36, 5/6, -6^-1-n (2^2+n + 3^1+n), 0 }
           n == 1
           n == 0
           n > 1
           True

```

f の 0 の周りの Taylor 展開は

$$f(z) = \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n.$$

Sum[] で検算が可能で、

```

5/6+19z/36-Sum[(1/2^(n+1)+2/3^(n+1))z^n,{n,2,Infinity}]
Simplify[%]

```

とすると、

$$\frac{5 - z - 3z^2 + z^3}{6 - 5z + z^2}$$

が得られる。無事、 $f(z)$ と一致したので、ほっと一息。

9 複素対数関数を描く

2変数 (x, y) の関数としての $\text{Im Log}(x + iy)$, $\text{Re Log}(x + iy)$ のグラフを描いてみよう。

それぞれ $\text{Arg}(x + iy)$, $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ であるから、コンピューターで図示しなくても分からなくはないが (図示しなくても分かるけれど)、やってみることを勧める。

`Plot3D[]` や `ContourPlot[]` では、描画範囲を x 座標と y 座標の範囲で指定するので、変数は $x + I y$ と書くと良い (小さなノウハウ)。

Mathematica でグラフを描こう

```
Plot3D[Im[Log[x+I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
```

```
  RegionFunction->Function[{x, y, z}, x^2+y^2<4]]
```

```
Plot3D[Re[Log[x+I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
```

```
  RegionFunction->Function[{x, y, z}, x^2+y^2<4]]
```

`RegionFunction[]` は $x^2 + y^2 < 4$ の範囲だけでグラフを描くための指定 (なくても描けるし、絞るのは趣味の問題)。

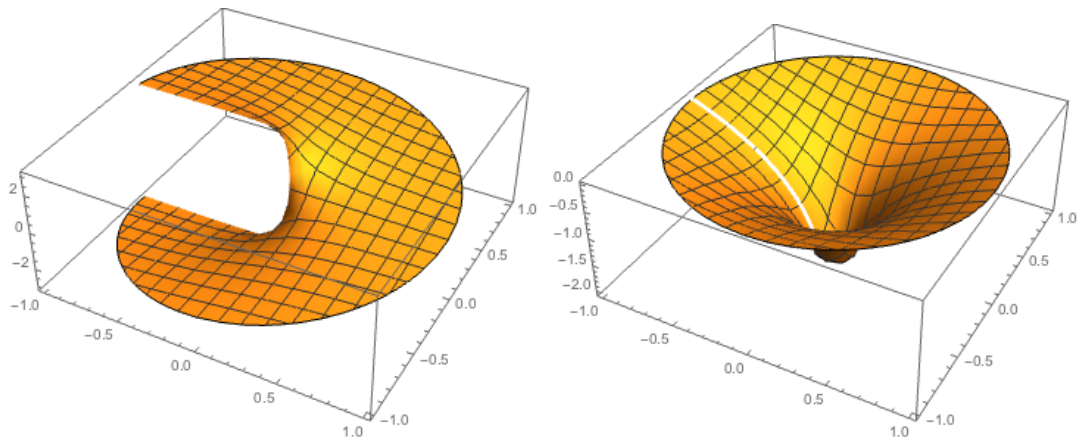


図 1: $\text{Im Log}(x + yi)$, $\text{Re Log}(x + yi)$ のグラフ

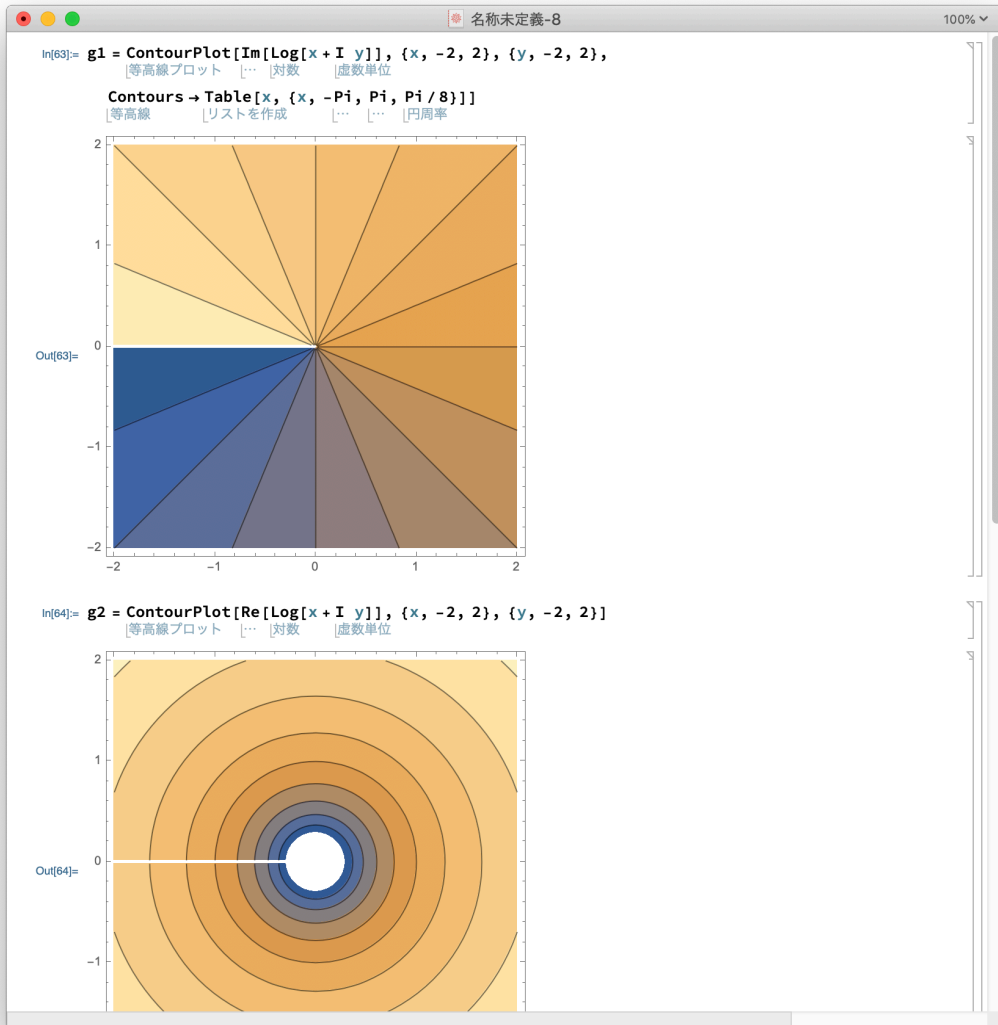
(以前は描画範囲を絞るため、`RegionFunction` を使うのではなく、`Re[Log[x+I y]]Boole[x^2+y^2<4]` のグラフを描いていた。)

Mathematica で描いたグラフは、マウスでつかんでグリグリ動かせる。ぜひやってみること (静止画を見るだけだと今ひとつ分かりにくい)。

`Plot3D[]` の代わりに `ContourPlot[]` を用いると、レベル表示 (≡等高線描画) 出来る。

```
ContourPlot[Im[Log[x+I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Contours->Table[x, {x, -Pi, Pi, Pi/8}]]
```

```
ContourPlot[Re[Log[x+I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



10 Abel の連続性定理に現れる収束範囲

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が収束円周上のある点 z_0 で収束するならば、その冪級数は “Stolz の角領域” で一様収束するので、和はそこで連続な関数である、というのが Abel の連続性定理で、それにより、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

などの有名な結果が証明できる。

例えば $c = 0, z_0 = R$ の場合、

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} < K \right\}$$

であるが、これは一体どういう形なのだろうか？

```

stolz[K_, R_] :=
Block[{g1, g2},
g1 = ContourPlot[x^2 + y^2 == R^2, {x, -2 R, 2 R}, {y, -2 R, 2 R}];
g2 = RegionPlot[
x^2 + y^2 < R^2 &&
Abs[1 - (x + I y)/R]/(1 - Abs[x + I y]/R) <= K, {x, -2 R,
2 R}, {y, -2 R, 2 R}]; Show[g1, g2]
]

R=1
Manipulate[stolz[K,R],{K,1,10,0.2}]

```

筆者は、Mathematica を使うまで、 Ω_K がどういう形をしているか、実は良く分かっていなかった(そんなに難しくもないけれど、ちょっと考えて分かるものでもなくて、何となく気になってはいたけれど、放置していました。)

11 線積分の験算

以下の線積分の値を求めよ。

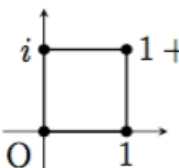
(1) $C: z = t + it^2$ ($t \in [0, 1]$) とするとき $I_1 = \int_C \operatorname{Re} z \, dz$ (2) $c \in \mathbb{C}, r > 0, n \in \mathbb{N}$,

$C: z = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とするとき $I_2 = \int_C \frac{dz}{(z-c)^n}$ (3) 0 から $1+i$ に至る線分を C

とするとき $I_3 = \int_C \operatorname{Im} z \, dz$ (4) 単位円 $|z| = 1$ の下半分を -1 から 1 までたどる曲線を C

とするとき $I_4 = \int_C \bar{z} \, dz$ (5) 図の正方形の周を反時計回りに一周する曲線を C とするとき

$I_5 = \int_C |z| \, dz, I_6 = \int_C (z^2 + 3z + 4) \, dz$



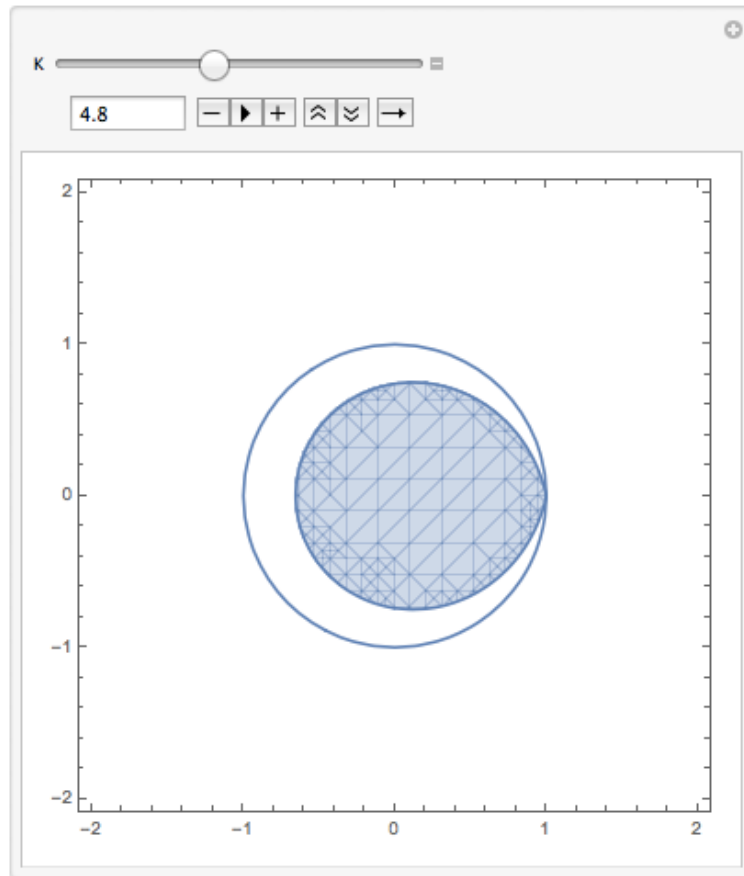


図 2: K を大きくすると膨れていきます

```

z=t+I t^2;
I1=Integrate[Re[z]D[z,t],{t,0,1}]

z=c+r Exp[I t];
I2=Integrate[1/(z-c) D[z,t],{t,0,2Pi}]
I2a=Integrate[1/(z-c)^n D[z,t],{t,0,2Pi}]

z=(1+I)t;
I3=Integrate[Im[z] D[z,t],{t,0,1}]

z=Exp[I t];
I4=Integrate[Conjugate[z] D[z,t],{t,Pi,2Pi}]

z1=t;
z2=1+I*t;
z3=1+I-t;
z4=I-I*t;
I5=Integrate[Abs[z1]D[z1,t],{t,0,1}]+Integrate[Abs[z2]D[z2,t],{t,0,1}]
+Integrate[Abs[z3]D[z1,t],{t,0,1}]+Integrate[Abs[z4]D[z2,t],{t,0,1}]

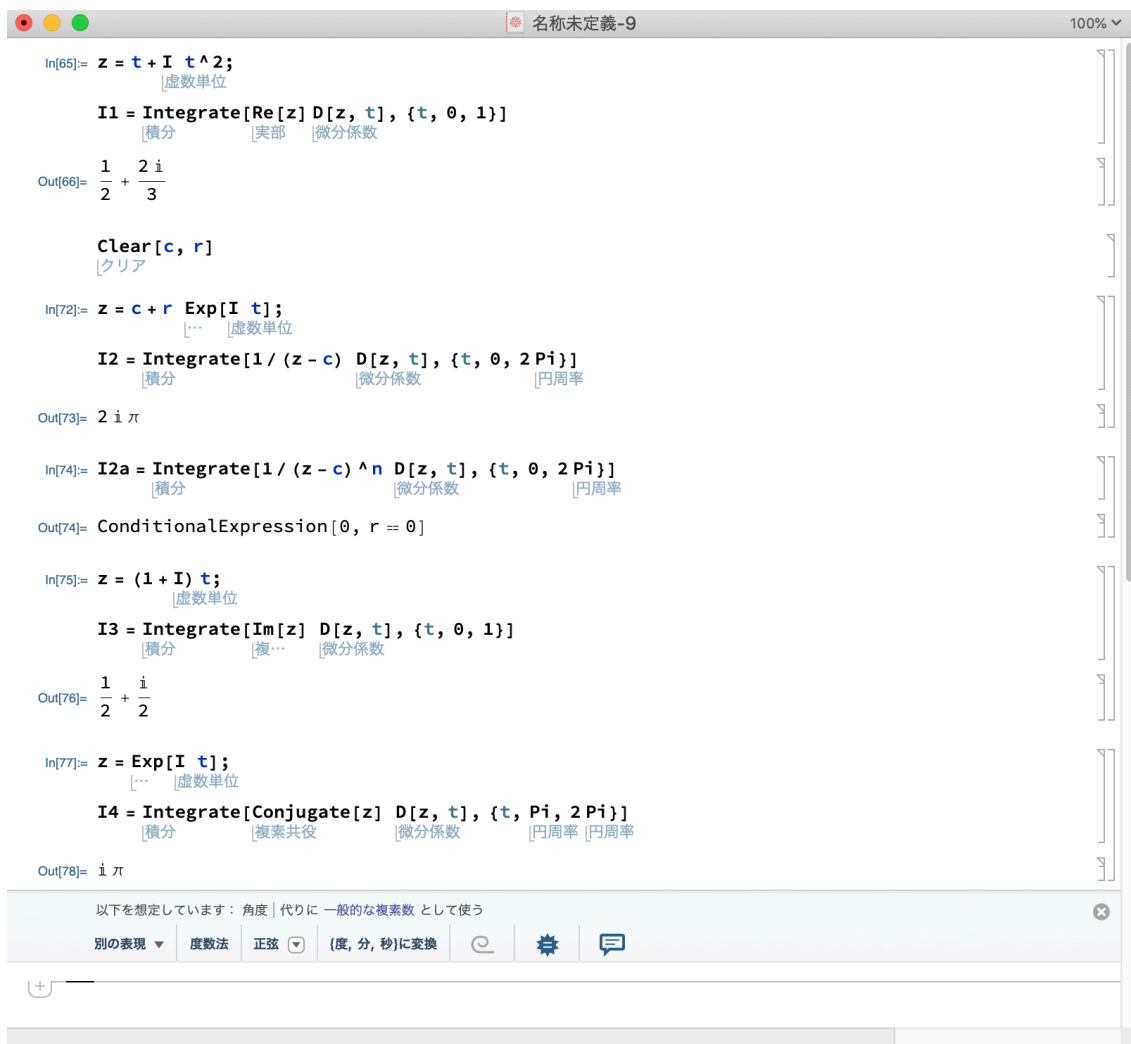
f[z_] := z^2 + 3 z + 4
I6 = Integrate[f[z1] D[z1, t], {t, 0, 1}] +
Integrate[f[z2] D[z2, t], {t, 0, 1}] +
Integrate[f[z3] D[z3, t], {t, 0, 1}] +
Integrate[f[z4] D[z4, t], {t, 0, 1}]

```

答は (1) $I_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$ (2) $n = 1$ のとき $I_2 = 2\pi i$, $n \neq 1$ のとき $I_2 = 0$ (3) $I_3 = \frac{1+i}{2}$ (4) $I_4 = \pi i$ (5) $I_5 = \frac{i-1}{2} (\sqrt{2}-1 + \log(1+\sqrt{2}))$ (6) $I_6 = 0$

Mathematica は、(5) の $\log(1+\sqrt{2})$ を $\text{ArcSinh}[1]$ と表示する。 $\text{TrigToExp}[]$ を施すと \log で表示してくれる。

```
In[ ]:= TrigToExp[ArcSinh[1]]
Out[ ]= Log[1+√2]
```




```

名称未定義-10 100%
In[145]:= z1 = t;
          z2 = 1 + I * t;
          z3 = 1 + I - t;
          z4 = I - I * t;
          I5 = Integrate[Abs[z1] D[z1, t], {t, 0, 1}] + Integrate[Abs[z2] D[z2, t], {t, 0, 1}] +
               Integrate[Abs[z3] D[z3, t], {t, 0, 1}] + Integrate[Abs[z4] D[z4, t], {t, 0, 1}]
Out[149]= (1/2 + i/2) + (1/2 + i/2) (sqrt(2) + ArcSinh[1])

In[153]:= TrigToExp[I5]
Out[153]= (1/2 + i/2) + (1 + i)/sqrt(2) + (1/2 + i/2) Log[1 + sqrt(2)]

In[155]:= Clear[f]

In[156]:= f[z_] := z^2 + 3 z + 4

In[157]:= I6 = Integrate[f[z1] * D[z1, t], {t, 0, 1}] + Integrate[f[z2] * D[z2, t], {t, 0, 1}] +
             Integrate[f[z3] * D[z3, t], {t, 0, 1}] + Integrate[f[z4] * D[z4, t], {t, 0, 1}]
Out[157]= 0

```

12 曲線の連続的な変形 (ホモトピー)

円を楕円に変形する。

```
phi0[t_]:= {Cos[t], Sin[t]};  
  
phi1[t_]:= {3Cos[t], 2Sin[t]};  
  
F[t_, u_] := (1-u)phi0[t] + u*phi1[t];  
  
Manipulate[ParametricPlot[{phi0[t], phi1[t], F[t, u]}, {t, 0, 2 Pi},  
  PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}}, {u, 0, 1}]
```

$\phi_1[t] := \{1/2, 0\}$ とすると、定数曲線で、像は $\{(1/2, 0)\}$ であり、円周 $x^2 + y^2 = 1$ を 1 点 $(1/2, 0)$ に変形することになる。

以上は複素数を使っていないので、書き換えてみる。

```
Clear[phi0, phi1, F]  
phi0[t_] := Exp[I t];  
phi1[t_] := 3Cos[t] + 2 I Sin[t];  
F[t_, u_] := (1-u)phi0[t] + u*phi1[t];  
z2xy[z_] := {Re[z], Im[z]}  
Manipulate[ParametricPlot[{z2xy[phi0[t]], z2xy[phi1[t]], z2xy[F[t, u]]},  
  {t, 0, 2 Pi}, PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}},  
  {u, 0, 1}]
```

(もっと面白い例に変えて、図もつけたいな…)

参考文献

[1]