複素関数・同演習 第21回

〜線積分 (3), Cauchy の積分定理 (1)〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/

2023年12月17日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. Cauchy の積分定理 (続き)
   - 三角形の周に沿う線積分の場合
   - 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0
3. 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 補講: 2025/1/23(木曜) 1,2 限 402 教室
- 体調不良で欠席する人がいるみたいなので、講義資料 PDF も公開します。遅くとも講義翌日に WWW に載せます。
- フィードバック、冬休み中になりそうです (すみません)。解答 PDF は早めに公開します。(なるべく講義を先に進めたいので、宿題の解説・講評はしばらく控えます。)
- 今日はこのスライドの §6.4 まで終わらせたい。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 21.1 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [1])

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

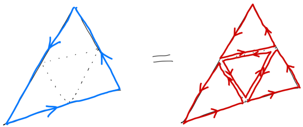
ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

(このスライドは講義では時間節約のため話さない。)

証明のアイディアは、

ⓐ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



ⓑ 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

- ⓘ 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az+b$ で良く近似できること
- ⓘⓘ 1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\displaystyle\int_{\text{閉曲線}}(az+b)dz=0.$

実際 $\left(\frac{az^2}{2}+bz\right)'=az+b$ であり、1 次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j = 1,2,3,4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$M = \left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|.$$

右辺の 4 つの項 $\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j^*} であったとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M \le 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (2)

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割&選択を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ:

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

$c \in \Delta_0 = \Delta \subset \Omega$ であることに注意する。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (3)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c)+f'(c)(z-c)\right)dz=0 \quad (f \text{ の } c \text{ での 1 次近似式の積分は } 0).$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz=\int_{\partial\Delta_n}\left[f(z)-\left(f(c)+f'(c)(z-c)\right)\right]dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\,dz\right|\le \max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\int_{\partial\Delta_n}|dz|.$$

$L_n:=\int_{\partial\Delta_n}|dz|$ は $\partial\Delta_n$ の弧長である。Δ_n は $\Delta_0=\Delta$ と相似であり、n が 1 増えるごとに、長さが $1/2$ 倍になる。ゆえに $L_n=\dfrac{L_0}{2^n}$ を満たす。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (4)

微分の定義 $\lim_{z\to c}\dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{g(z)}{z-c}\right|\le\varepsilon.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\,.$$

$z,c\in\Delta_n$ であれば、$|z-c|\le L_n$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n}\le\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\varepsilon L_n\cdot L_n=\frac{\varepsilon L_0^2}{4^n}\quad\text{であるから}\quad 0\le M\le\varepsilon L_0^2.$$

$(\forall\varepsilon>0)\ 0\le M\le\varepsilon L_0^2$ より $M=0$ が導かれる。□

定理 21.1 とその証明から すぐ or 直観的に 分かること

- (a) Ω に含まれる任意の "多角形" P の周 $\Gamma := \partial P$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ も 0.

実際、多角形は三角形に分割でき、各三角形の周に沿う線積分は (上の Lemma から) 0. これを全部加えると $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　直観的に分かること

- ⓑ Ω の中にある領域 D の境界が区分的に C^1 級の閉曲線であるとき、D の中に穴はない (ここは曖昧だけど「直観的」なので) とすると $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$ (正当化には少し手間がかかる).

図 1: D 内に穴がない

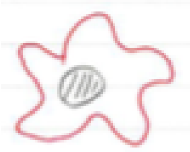


図 2: D 内に穴がある

証明もどき (どうせ後でやるので講義ではカット)

D を細かく分割する: $D = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} D_k$. $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} f(z)\,dz$.
∂D より離れた D_k は三角形が選べて、その周 ∂D_k に沿う線積分は 0.
∂D に近い D_k は三角形が選べないが、Ω 内のある円盤 $D(c;\varepsilon)$ に含まれるように細かく分割しておけば、$F(z) := \displaystyle\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ $(z \in D(c;\varepsilon))$ が原始関数になる (詳細は来週)。だから線積分は 0.

余談　ベクトル解析履修者向け: 有名な Green の定理を用いる別証明がある。

Green の定理 (講義ではカットする)

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy)$$
$$= \iint_\Delta (-v_x - u_y) dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y) dx\,dy.$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。ゆえに

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \iint_\Delta 0\,dx\,dy + i\iint_\Delta 0\,dx\,dy = 0. \quad \square$$

(このスライドは講義では省略だろうな。)

上の論法が成立するには、f' の連続性を仮定する必要がある [1]。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、Green の定理に十分慣れていれば [2] 色々な議論が単純になるので、魅力的に感じられるかもしれない。

実は教科書 (神保 [2]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [3] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

[1] テキストによっては、関数が正則であることの定義を、微分可能かつ導関数が連続という条件を満たすこととしている。

[2] 残念ながら、そういうカリキュラムを採用している学科は稀にしかないでしょう。

Cauchy の積分定理の結論部分は、

$$\text{任意の区分的 } C^1 \text{ 級閉曲線 } C \text{ に沿う線積分が 0: } \int_C f(z)\,dz = 0$$

という条件だった。

一方で「f が原始関数を持てば」これが成り立つことを知っている ($\int_C f(z)\,dz = F(\text{終点}) - F(\text{始点}) = 0$)。何か関係があるのだろうか？

Ω を $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続とするとき、以下の 3 つの条件の関係について調べよう。

1. (i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
2. (ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
3. (iii) f は Ω で正則である

すでに (i) $\Rightarrow$ (ii) は知っているが、実は逆 (ii) $\Rightarrow$ (i) も成り立つ。証明は難しくないので、このすぐ後で述べる (命題 21.4)。

6.4 原始関数が存在 ⇔ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0

さらに、実は (i) ⇒ (iii) である。その証明は後日。

それは *Cauchy* の積分公式 (まだ説明していない) を用いて得られる「正則ならば、各点の近傍で冪級数展出来る」という定理 (後で証明するこの講義の重要な目標) から、F は何回でも微分できることが分かるので、特に F が 2 回微分可能であることから、$f = F'$ も微分できるからである。

上に述べたように (i) と (ii) は同値なので、(ii) ⇒ (iii) も成り立つ。すなわち「Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つならば、f は Ω で正則である。」これは通常 **Morera（モレラ）の定理**と呼ばれる。

(これは既に言ってあることだが) (iii) ⇒ (ii) は一般には成り立たない。これは $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$ という例から分かる。

ここまでをまとめると、

(i) と (ii) は同値で (iii) より強い

(iii) に条件を足して (ii) を導くのが Cauchy の積分定理である、と考えられる。

6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0

Ω に何か $+\alpha$ の条件をつけると (iii) $\Rightarrow$ (ii) が言えて、すべて同値になる。

定理 21.2 (単連結領域における Cauchy の積分定理　とても有名)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結あるいは星型の領域とし、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とする。このとき Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

(単連結、星型の定義は後述する。) これから

星型領域や単連結領域に対しては、(i), (ii), (iii) は同値である

単連結の場合は特に有名であるが、厳密な証明には少し手間がかかる (講義ノート [4] の E 節に載せてある。証明のアイディアは、この講義でも少しずつ紹介してゆく。)。

星型の場合は比較的簡単に証明できて (本日後半)、その定理だけで関数論の多くの重要な結果が導くことが出来る。

余談 21.3 (ベクトル解析を勉強した人に)

実は、ベクトル解析にも、これとよく対応する話がある。

(i) が「ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つ」, (ii) が $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=0$, (iii) が $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=0$, ということになる。

(i) と (ii) は同値である。(i) (あるいは (ii)) から (iii) が導かれるが、逆は一般には成り立たず、単連結領域であれば逆も成立する、というのは同じである。 □

では (ii) $\Rightarrow$ (i) を証明しよう。

定理 21.4 (任意の区分的 C^1 級閉曲線に沿う線積分が 0 ならば原始関数を持つ)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つとする。このとき、ある正則関数 $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が存在して、$F' = f$.

証明　Ω 内の任意の点 a を取る。Ω が弧連結であるから、任意の $z \in \Omega$ に対して、a を始点、z を終点とする Ω 内の区分的に C^1 級の曲線 C_z が存在する。

$$F(z) := \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta$$

とおく。

$F(z)$ の値は C_z の取り方にはよらない。実際、a を始点、z を終点とする Ω 内の 2 曲線 C_z, C_z' があるとき、$C := C_z + (-C_z')$ とおくと、C は閉曲線であるので、仮定 (条件 (ii)) から

$$0 = \int_C f(\zeta)\,d\zeta = \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{C_z'} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{ゆえに} \quad \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{C_z'} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つからである。

この F が f の原始関数であることを示す。

任意の $z \in \Omega$ に対して、$(\exists \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \subset \Omega$. ゆえに $|h| < \varepsilon$ を満たす任意の h に対して、z から $z+h$ に向かう線分 $[z, z+h]$ は Ω に含まれる。C_{z+h} として $C_z + [z, z+h]$ を選ぶことにより、

$$F(z+h) - F(z) = \int_{C_z+[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta - \int_{C_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta. \tag{1}$$

一方

$$\int_{[z,z+h]} d\zeta = [\zeta]_{\zeta=z}^{\zeta=z+h} = h$$

であるから、$h \neq 0$ とするとき

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\cdot\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} d\zeta$$
$$= \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(\zeta)-f(z))\,d\zeta.$$

ゆえに

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta|$$
$$\leq \frac{1}{|h|}\max_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)| \int_{[z,z+h]} |d\zeta|$$
$$= \max_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|\,.$$

f は z で連続であるから、$h \to 0$ のとき右辺 $\to 0$. ゆえに $F'(z) = f(z)$. □

2024/12/17 の講義はここまでです。

参考文献

[1] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).

[2] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では `https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063` でアクセスできる.

[3] 堀川穎二(えいじ)：複素関数論の要諦, 日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).

[4] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf` (2014〜).