

複素関数・同演習 第 20 回

～線積分 (2), Cauchy の積分定理 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/>

2024 年 12 月 11 日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 線積分 (続き)
 - 曲線に関する用語の定義 (続き)
 - 線積分の性質
- ③ Cauchy の積分定理
 - はじめに
 - 準備
- ④ 参考文献

- 前回に引き続き、複素線積分 $\int_C f(z) dz$ の性質を説明する (講義ノート [1] の§5)。
- 前回授業中に説明したことですが、これから体感的には進行が速くなります (新しい話題がどんどん出て来る)。心して下さい。
- 今回からしばらく授業を Zoom でも配信します。動画も収録して後から見られるようにするかもしれません。

5.2 曲線に関する用語の定義 (続き)

定義 20.1 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 $C_1 + C_2$)

- ① $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) の逆向きの曲線 $-C: z = \varphi(-t)$ ($t \in [-\beta, -\alpha]$)
- ② $C_1: z = \varphi_1(t)$ ($t \in [\alpha_1, \beta_1]$), $C_2: z = \varphi_2(t)$ ($t \in [\alpha_2, \beta_2]$) について、 C_1 の終点 = C_2 の始点のとき。 $C_1 + C_2$ を次のように定義する。

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases}$$

教科書は $C_2 C_1$ と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では $C_1 + C_2$ と表す (その方がふつう)。後者は、後で終点=始点でない場合にも使う (そういうのは曲線鎖という)。

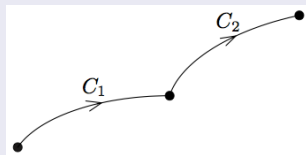


図 1: C_1 の終点 = C_2 の始点ならば $C_1 + C_2$ が作れる

5.3 線積分の性質

定理 20.2 (線積分の性質)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 $\lambda \in \mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad \int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$$

$$\textcircled{2} \quad \int_C \lambda f(z) dz = \lambda \int_C f(z) dz.$$

$$\textcircled{3} \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

$$\textcircled{4} \quad \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

$$\textcircled{5} \quad \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

5.3 線積分の性質

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

③ 一般に連続関数 $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つことを認めれば、 $F(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ について適用して、

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))\varphi'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz|.$$

④ $z = \varphi(-t)$ ($t \in [-\beta, -\alpha]$) とすると、 $dz = -\varphi'(-t)dt$ であるから、

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t)) \cdot (-\varphi'(-t)) dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t) dt.$$

$s = -t$ とおくと、 $t = -\alpha$ のとき $s = \alpha$, $t = -\beta$ のとき $s = \beta$, $dt = -ds$ であるから、

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\varphi'(s) \cdot (-1) ds = - \int_C f(z) dz. \quad \square$$

5.3 線積分の性質

注意 20.3

弧長要素に関する線積分 $\int_C f(z) |dz| = \int_C f ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z) |dz| = \int_C f(z) |dz|. \quad \square$$

定理 20.4

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 □

5.3 線積分の性質

例 20.5

次の5つの曲線について考える。

$$C_1: z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

$$C_2: z = e^{i\pi t} \quad (t \in [0, 1])$$

$$C_3: z = e^{i\pi t^2} \quad (t \in [0, 1])$$

$$C_4: z = -t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

$$C_5: z = t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である：

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$j = 1, \dots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、 $C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\int_{C_j} f(z) dz$ の値は皆同じであり、

$$\int_{C_5} f(z) dz = - \int_{C_4} f(z) dz \quad \text{であることが分かる。}$$

5.3 線積分の性質

例 20.5 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

$$(1) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_0^\pi f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta} d\theta.$$

(1) で、 $\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t} dt = \int_{C_2} f(z) dz.$$

(1) で、 $\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^2}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t^2}) \cdot 2\pi i e^{i\pi t^2} dt = \int_{C_3} f(z) dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\int_{C_4} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$ であることを示せ。

宿題 10 について

線積分の計算がテーマ。

- まず原始関数が存在するかどうか。存在して見つけられれば、それを使って簡単に計算できる。そうでない場合は、定義に基づいて考えてみる。
- 曲線がどういうものかはあくすること。図を描くことを習慣づけることを勧める。
- パラメーター付け φ が与えられていない場合、自分で用意する。一通りではないが、どれでも構わない(どれで計算しても、間違えない限り、結果は同じはず)。
- (4) の Γ は前回の講義で式を書いたけれど、それは使わない。 C_1 (下の辺を左から右), C_2 (右の辺を下から上), C_3 (上の辺を右から左), C_4 (左の辺を上から下) とするとき、

$$\Gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

であるから

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz.$$

各 C_j は簡単なパラメーター付けがとれる。 C_3 ならば $z = (1 + i) - t$ ($t \in [0, 1]$) とか。

6 Cauchy の積分定理

いよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くことにする。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的に分かる形で説明して、三角形の周の場合 (Goursat-Pringsheim の定理) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の3つである (他に **Green の定理**を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

- Ⓐ f は \mathbb{C} の領域 Ω で**正則** (Ω の任意の点で微分可能)。
- Ⓑ C は Ω 内の**閉曲線**。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- Ⓒ C の「**囲む**」範囲で f は**正則**。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか?と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は \mathbb{C} の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}, C: z = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、 $\int_C f(z) dz = 0$ ではない)。

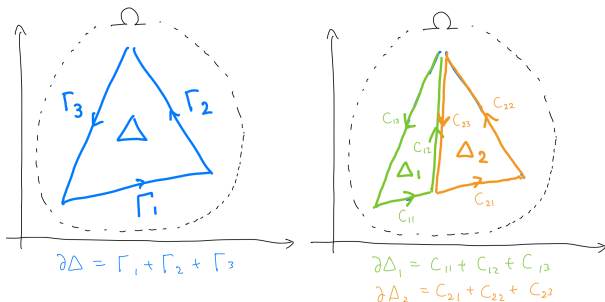
しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.2 準備

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 Ω に含まれる三角形 Δ を 2つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ (∂ 某 は、某 の周を正の向きに一周する曲線)。

$$(2) \quad \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz.$$



実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z) dz = \int_{-C_{12}} f(z) dz = - \int_{C_{12}} f(z) dz.$$

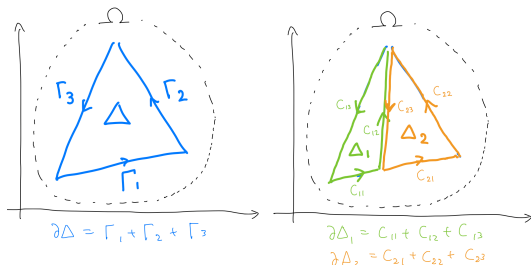
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z) dz + \int_{C_{23}} f(z) dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz &= \left(\int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}} \right) + \left(\int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}} \right) \\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}} \\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square \end{aligned}$$



2024年12月11日の講義はここまでです。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf> (2014～).