

複素関数・同演習 第19回

～線積分～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/>

2024年12月10日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 線積分
 - 線積分の定義
 - 原始関数
 - 曲線に関する用語の定義
- ③ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 先週は休講してしまい、すみませんでした。先週の方は補講を行います。講義内容の順番を多少入れ替えして (証明などは後回しにするなど)、演習が必要なものは早めにすませるように工夫します。宿題の解答は、PDF で公開することにします。
- いよいよ線積分 (講義ノート [1] では、§5) に入る。
- ここからは、講義内容を PDF で公開します。講義の日の晩か、翌日までに WWW に置きます。

5 線積分 5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 19.1 (線積分)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $C : z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、 $f : C^* \rightarrow \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$. このとき

$$(1) \quad \int_C f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とおき、 f の曲線 C に沿う線積分 (the line integral along C) と呼ぶ。
また

$$(2) \quad \int_C f(z) |dz| := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

と定める。弧長要素に関する線積分と呼ぶ。 $\int_C f ds$ とも書かれる。

5.1 線積分の定義

例 19.2

$f(z) = z^2$, $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) のとき。 $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta} d\theta \\ &= i \left[\frac{e^{3i\theta}}{3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - e^{3 \cdot 0}) = \frac{(-1) - 1}{3} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 19.3

$f(z) = \frac{1}{z}$, $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) のとき。 $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

5 線積分 5.1 線積分の定義

注意事項

① 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実1変数関数の積分 $\int_a^b f(x) dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

② φ は区分的に C^1 級であるから

$(\exists \{t_j\}_{j=0}^m) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \wedge$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級。

分点 t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

$$\int_C f(z) dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とみなすと良い。

5.1 線積分の定義

- ⑧ $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人があるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$(3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt := \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$(4) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left| \sum_j F(t_j) \Delta t_j \right| \leq \sum_j |F(t_j)| \Delta t_j$$

から証明出来る。(3) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

④ (とても良く使う不等式。)

$$(5) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

実際、 C が $z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) とすると

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t)) \varphi'(t)| dt$$

と書き換えられるが、これは (4) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in C^*} |f(z)| \int_C |dz| = \max_{z \in C^*} |f(z)| \times (C \text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注 $C^* = C$ の跡 $= \varphi$ の値域 $= \text{Image } \varphi = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ である。

注 定義より $\int_C |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt$ であるから、これは C の弧長である。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

定理 19.4 (微積分の基本定理、のようなもの)

Ω は \mathbb{C} の開集合, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F' = f$)、 C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とすると、

$$(6) \quad \int_C f(z) dz = F(b) - F(a).$$

が成り立つ。ただし、 a, b はそれぞれ C の始点、終点である。

((6) の右辺を、 $[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

5.2 原始関数

証明 C が $z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) と表せて、 φ が C^1 級である場合、

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C F'(z) dz = \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt \\ &= [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta, \quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1}, t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級.}$$

このとき

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \sum_{j=1}^m (F(\varphi(t_j)) - F(\varphi(t_{j-1}))) \\ &= F(\varphi(t_m)) - F(\varphi(t_0)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、 φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

5.2 原始関数

上の定理は、1変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な1変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t) dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な1変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 \mathbf{f} に対して、 \mathbf{f} のポテンシャル ($\nabla F = \mathbf{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$.)

5.2 線積分の定義 (続き)

上の2つの例を見直してみる。

例 19.5 (原始関数が存在すれば楽々計算 例 19.2 再訪)

$f(z) = z^2$, $C: z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とする。 $F(z) := \frac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z) dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad (\text{もちろん前の計算と一致}).$$

例 19.6 (原始関数が存在しない例 例 19.3 再訪)

(前半) $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) とする。 f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、 $C: z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z) dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところがすでに見たように $\int_C f(z) dz = 2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。

5.2 原始関数

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大重要である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は \log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Arg} z$, \bar{z} . これらの原始関数は存在しない。

5.2 原始関数

例 19.6 (原始関数が存在しない例 (つづき)) 例 19.3 再訪

(後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。 $F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、 $F'(z) = \frac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon: z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。 C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz &= [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon} \\ &= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i. \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、 $\int_C f(z) dz = 2\pi i$ に一致するのはもっともらしい。

5.2 原始関数

原始関数が存在しない場合は、例えば例 19.2, 19.3 でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 19.7 (原始関数の存在しない例)

$C: z = (1 + 2i)t$ ($t \in [0, 1]$) とする。 $f(z) = |z|$ は原始関数を持たない。

$$\begin{aligned}\int_C |z| dz &= \int_0^1 \sqrt{t^2 + (2t)^2} \cdot (1 + 2i) dt = (1 + 2i)\sqrt{5} \int_0^1 |t| dt \\ &= (1 + 2i)\sqrt{5} \int_0^1 t dt = \frac{(1 + 2i)\sqrt{5}}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は \mathbb{C} の開集合, $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続) とする。

- ① $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を **Cの像** または **跡** と呼び、 C^* と表す。
- ② C が **C^1 級** とは、 φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、 φ' が連続) であることをいう。
- ③ C が **C^1 級正則** とは、 C が C^1 級かつ $(\forall t \in [\alpha, \beta]) \varphi'(t) \neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)

- ④ C が **区分的 C^1 級** とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。

- ⑤ C が **区分的 C^1 級正則** とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t) \neq 0$ (ただし $t = t_{j-1}, t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

- ⑥ C が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- ⑦ C が**単純** (Jordan arc) \Leftrightarrow 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta]$ で単射であることをいう。
要するに「自分自身と交わらない」こと。
- ⑧ 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** \Leftrightarrow 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理** 「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を2つの領域(一方は有界、もう一方は無界)にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 19.8 (円周)

$C: z = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) は、 C^1 級正則単純閉曲線である。 C の像は中心 c 、半径が r の円周で、 C は正の向きである。単に $|z - c| = r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

5.3 曲線に関する用語の定義

例 19.9 (正方形の周)

図の正方形の周。

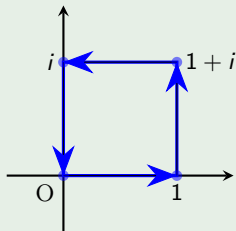


図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C: z = \varphi(t) := \begin{cases} t & (t \in [0, 1]) \\ 1 + i(t-1) & (t \in [1, 2]) \\ 1 + i - (t-2) & (t \in [2, 3]) \\ i - i(t-3) & (t \in [3, 4]) \end{cases}$$

このとき、 C^* = 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。

□

2024年12月10日の講義はここまで。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf> (2008～).