複素関数・同演習 宿題 No. 8 (2023 年 11 月 22 日出題, 11 月 28 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 8

(1) 有理式 $f(z) = \dfrac{2z^4 + 7z^3 + 10z^2 + 13z - 5}{z^3 + 3z^2 - 4}$ を部分分数分解せよ。

(2) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ が収束冪級数であることを確かめ、和を求めよ ($\sum$ を使わずに $f(z)$ を表せ)。

(ヒント: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を微分して z をかけると、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ が求まる。)

(3) $f''(z) = 4f(z),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ を満たす収束冪級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とその収束半径を求めよ。

(この関数は 11/21 の講義で導入した初等関数で表せる。気づいたらそれを用いて $f(z)$ を表せ。)

問 8 解説

- (1) 部分分数分解は数学のあちこちで登場するけれど、関数論でも必須常識と考えて下さい (と何度も言ってある)。割り算とか因数分解でミスをする人が少なくないけれど、できるようにしておいて下さい。

- (2) で「収束冪級数であることを確かめ」と指示しているのに、無視した人が少なくない。収束しないと議論がナンセンスになるので、指示されていなくても自分から確かめるべきことです。

- (3) は授業中に類題をやっているわけだけど…冪級数を使わずに微分方程式の授業で学んだことを流用して解いていた人がいました。それで確かに問に答えたことになるかどうか。(実関数について成り立つことのうち、複素関数でどれが同じように成り立ち、どれが成り立たないか、慎重に講義で説明をしてきたわけだけど、何の説明も書かずにやられると、正直すごく情けない…)「ここでは冪級数について学んだことを使って解いてみましょう」と言って類題を解きました。

問 8 解答

(1) $2z^4 + 7z^3 + 10z^2 + 13z - 5$ を $z^3 + 3z^2 - 4$ で割ると、商 $2z + 1$, 余り $7z^2 + 21z - 1$ である。また $z^3 + 3z^2 - 4 = (z+2)^2(z-1)$. ゆえに

$$f(z) = \frac{(2z+1)(z^3+3z^2-4) + 7z^2 + 21z - 1}{z^3+3z^2-4} = 2z + 1 + \frac{7z^2+21z-1}{(z+2)^2(z-1)}.$$

$(z+2)^2$ と $z-1$ は互いに素なので

$$\frac{7z^2+21z-1}{(z+2)^2(z-1)} = \frac{1\,\text{次式}}{(z+2)^2} + \frac{C}{z-1} \quad (C\,\text{は定数})$$

と分解できる。1 次式は $A(z+2) + B$ (A と B は定数) と表せるので

$$\frac{7z^2+21z-1}{(z+2)^2(z-1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{(z+2)^2} + \frac{C}{z-1}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払って

$$7z^2 + 21z - 1 = A(z-1)(z+2) + B(z-1) + C(z+2)^2.$$

これは恒等式である (2 次式で 3 個以上の z に対して成り立つから)。

$z = 1$ を代入して $27 = 9C$. ゆえに $C = 3$.

$z = -2$ を代入して $-15 = -3B$. ゆえに $B = 5$.

z^2 の係数を比較して $7 = A + C$. ゆえに $A = 4$.

以上より

$$f(z) = 1 + 2z + \frac{4}{z+2} + \frac{5}{(z+2)^2} + \frac{3}{z-1}.$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}.$$

公比 z の等比級数なので、収束条件は $|z| < 1$. ゆえに収束円は $D(0;1)$. この範囲で何回でも項別微分できる。

上の式を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

微分して、z をかけることで、一般項に n をかけることが出来ることが分かった。ゆえに (もう一度それをして)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

上に述べたことから、これは $D(0;1)$ で成立する。特に $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ は収束冪級数である。

余談: これから任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ の和が求まることが分かる。

(3)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$
$$f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$f''(z) = 4f(z) \Leftrightarrow (\forall n \geq 0) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = 4a_n.$$

条件 $f(0)=0$ より $a_0 = 0$, $f'(0) = 1$ より $a_1 = 0$ であるので、

$$a_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$a_3 = \frac{4a_1}{3 \cdot 2} = \frac{4}{3!}, \quad a_5 = \frac{4a_3}{5 \cdot 4} = \frac{4^2}{5!}, \quad \cdots, \quad a_{2k+1} = \frac{4^k}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

(数学的帰納法を使うまでもないでしょう。)

以上より

$$(\heartsuit) \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

$\zeta := z^2$ とおくと $f(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(2k+1)!} \zeta^k$ である。$b_k := \frac{4^k}{(2k+1)!}$ とおくと

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_k|}{|b_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{4^k}{(2k+1)!} \frac{(2k+3)!}{4^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+3)(2k+2)}{4} = +\infty$$

であるから、$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに冪級数 ($\heartsuit$) も任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。すなわち冪級数 ($\heartsuit$) の収束半径は ∞ である。

ちなみに (これは書かなくても良いということ)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} \sinh(2z). \blacksquare$$