複素関数・同演習 宿題 No. 7　(2023 年 11 月 15 日出題, 11 月 21 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名____________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 7　(1), (2) は等比級数の和の公式を利用して解答すること。

(1) 次の各関数を 0 のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ

(a) $f(z) = \dfrac{1}{2-z}$　(b) $g(z) = \dfrac{3}{4z+5}$　(c) $h(z) = \dfrac{1}{(6z-7)^2}$

(d) $\varphi'(z) = \dfrac{1}{8-z}$, $\varphi(0) = 9$ を満たす φ　(e) $r(z) = \dfrac{6z^4 - 5z^3 - 51z^2 - 60z - 35}{z^3 - 2z^2 - 7z - 4}$

Mathematica で `Apart[ (6z^4-5z^3-51z^2-60z-35) /(z^3-2z^2-7z-4)]` として部分分数分解できる。結果は $\dfrac{3}{(z+1)^2} + \dfrac{5}{z-4} + 6z + 7$ (自分で分解を試みること)

(2) $F(z) = \dfrac{1}{2z+3}$ を 4 のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問7解説　「冪級数展開し」なのだから、冪級数の形 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n)$ に変形することを求められているのに、最後がその形になっていない人が結構いた。例えば $\left(-\frac{4}{5}z\right)^n$ は $\frac{(-4)^n}{5^n}z^n$ のようにして、a_n と $(z-c)^n$ が混じらないようにすべき。$\left(\frac{1}{6z-7}\right)' = ((6z-7)^{-1})' = \frac{-6}{(6z-7)^2}$ の 6 を見落とす人が多かった。

問7解答

(1) 以下、収束半径を ρ と表す。

(a)

$$f(z) = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-z/2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow |z/2|<1 \Leftrightarrow |z|<2$ であるから、$\rho=2$.

(b)

$$g(z) = \frac{3}{4z+5} = \frac{3}{5(1+4z/5)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{4z}{5})} = \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-4)^n}{5^{n+1}}z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow |-4z/5|<1 \Leftrightarrow |z|<\frac{5}{4}$ であるから、$\rho=\frac{5}{4}$.

(c)

$$\frac{1}{6z-7} = -\frac{1}{7(1-\frac{6}{7}z)} = -\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{7}z\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{7^{n+1}}z^n.$$

これは等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow |-6z/7|<1 \Leftrightarrow |z|<\frac{7}{6}$. ゆえに、この冪級数の収束半径は $\frac{7}{6}$. (任意の) 冪級数は収束円の内部で項別微分が出来るから

$$-\frac{6}{(6z-7)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^{n+1}}nz^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{7^{n+2}}(n+1)z^n.$$

ゆえに

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{7^{n+2}}(n+1)z^n.$$

冪級数は項別微分しても収束半径は変わらないので、$\rho=\frac{7}{6}$.

(d) (この問題は「次回まわし」ということで出題範囲から除いたのだった。)

$$\varphi'(z) = \frac{1}{8-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{8^{n+1}} \quad (\text{収束半径は } 8).$$

(任意の) 冪級数は収束円の内部で項別積分できることと、$\varphi(0)=9$ であることから

$$\varphi(z) = 9+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)8^{n+1}} = 9+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{8^n n}.$$

冪級数は項別積分しても収束半径は変わらないので、$\rho=8$.

(e) $r(z)$ を部分分数分解する。その計算は後回しにして、結果を書くと

$$r(z) = 7 + 6z + \frac{5}{z-4} + \frac{3}{(z+1)^2}.$$

$a \neq 0$ に対して、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $| < 1 \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$. ゆえに

$$\frac{1}{z-4} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 4).$$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1).$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)^2} &= -\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n z^n \quad (\text{収束半径} = 1).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}r(z) &= 7 + 6z - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{4^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)(-1)^n z^n \\ &= 7 + 6z - \frac{5}{4} - \frac{5}{16}z - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{4^{n+1}}z^n + 3 - 6z + \sum_{n=2}^{\infty}3(n+1)(-1)^n z^n \\ &= \frac{35}{4} - \frac{5}{16}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-5}{4^{n+1}} + 3(-1)^n(n+1)\right)z^n.\end{aligned}$$

収束半径が 1, 4 の冪級数の和なので、$\rho = 1$.

$r(z)$ **の部分分数分解**　$r(z)$ の分子 $n(z) := 5z^4 - 29z^3 + 39z^2 + 18z - 25$ を分母 $d(z) := z^3 - 7z^2 + 15z - 9$ で割ると、商が $5z + 6$, 余りが $6z^2 - 27z + 29$. つまり

$$n(z) = d(z)(5z+6) + 6z^2 - 27z + 29.$$

ゆえに

$$r(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{(5z+6)d(z) + 6z^2 - 27z + 29}{d(z)} = 5z + 6 + \frac{6z^2 - 27z + 29}{d(z)}.$$

$d(z) = (z-1)(z-3)^2$ であるから

$$\frac{6z^2 - 27z + 29}{d(z)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{(z-3)^2}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払った

$$6z^2 - 27z + 29 = A(z-3)^2 + B(z-1)(z-3) + C(z-1)$$

は恒等式である。

$z=1$ を代入して $8=4A$ より $A=2$.

$z=3$ を代入して $2=2C$ より $C=1$.

最高次の係数を比較して $6=A+B$ より $B=4$.

ゆえに
$$r(z)=5z+6+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{z-3}+\frac{1}{(z-3)^2}.$$

(2) 古い問題の解答を載せていました。修正版です。

4 のまわりで冪級数展開するとは、$z-4$ の冪級数に変形する、ということである。

(ここから解答)

$$F(z)=\frac{1}{2z+3}=\frac{1}{2(z-4+4)+3}=\frac{1}{2(z-4)+11}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{11}(z-4)}=\frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{11}(z-4)\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{11^{n+1}}(z-4)^n.$$

等比級数であるから、収束する $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{2}{11}(z-4)\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{11}|z-4| < 1 \Leftrightarrow |z-4| < \frac{11}{2}$.
ゆえに収束円は $D\left(4;\frac{11}{2}\right)$. ■