複素関数・同演習 宿題 No. 2 (2023 年 10 月 4 日出題, 10 月 10 日 13:30 までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 2 (授業の進行具合によっては (4) は削除するかもしれない。授業中の指示に従うこと。)

(1) $\theta = 0, \dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}$ のとき、$e^{i\theta}$ の値を求めよ。

(2) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ の極形式と、$\operatorname{Arg} z$ を求めよ。

(3) $\theta \in \mathbb{R}$, $z = -3e^{i\theta}$ の時、z, $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ の極形式を求めよ。

(4) 1 と -1 の 8 乗根を 10/3,4 の講義の定理に基づく方法で求めよ。(まず極形式の形で求めるが、できれば $\sqrt{\quad}$ を使って表すこと。) また、-1 の 8 乗根を複素平面上に図示せよ。

問 2 解説　z の極形式を求めるには、まず $|z|$ と $\dfrac{z}{|z|}$ を求める。

(1) 単位円上の点が思い浮かぶ (描ける) ので、すぐに答えが書けるはず。

$$e^{i\cdot 0}=1,\quad e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}+i}{2},\quad e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\quad e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i,\quad e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

(2) $z=-2\sqrt{3}-2i$ とすると、$|z|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2^2}=\sqrt{12+4}=4.$

$$\frac{z}{|z|}=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=e^{-5\pi i/6}.$$

ゆえに z の極形式は

$$z=4e^{-5\pi i/6}\quad (z=4e^{7\pi i/6}\text{ などでも良い}).$$

$\theta=-\frac{5\pi}{6}$ は z の偏角であり、かつ $-\pi<\theta\le\pi$ を満たすので、主値でもある。

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{5\pi}{6}\quad (\text{主値は一通りしかない。これ以外は間違い}).$$

(3) $-3=3(-1)=3e^{i\pi}$ であるから

$$\begin{aligned}
z&=-3e^{i\theta}=3e^{i\pi}e^{i\theta}=3e^{i(\pi+\theta)},\\
\overline{z}&=\overline{3e^{i(\pi+\theta)}}=\overline{3}\;\overline{e^{i(\pi+\theta)}}=3e^{-i(\pi+\theta)},\\
\frac{1}{z}&=\frac{1}{3e^{i(\pi+\theta)}}=\frac{1}{3}e^{-i(\pi+\theta)}.
\end{aligned}$$

(極形式なのでこれも他の答え方がある。$z=3e^{i(\theta-\pi)}$ とか。三角関数による答えは勧めない。)

(4) 1 の 8 乗根、つまり $z^8=1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ の解は、(a) 極形式を利用すると、$e^{i\left(\frac{0}{8}+\frac{2\pi}{8}k\right)}=e^{i\frac{k\pi}{4}}$ $(k=0,1,\cdots,7)$ であるから、

$$z=e^0,e^{i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{\pi}{2}},e^{i\frac{3\pi}{4}},e^{i\pi},e^{i\frac{5\pi}{4}},e^{i\frac{3\pi}{2}},e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

すなわち

$$(\star)\qquad z=1,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ i,\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ -1,\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ -i,\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

(b) 因数分解で解くことも難しくない。

$$\begin{aligned}
z^8-1&=(z^4+1)(z^4-1)=\left(z^4+2z^2+1-2z^2\right)(z^2+1)(z^2-1)\\
&=\left(z^4+2z^2+1-\left(\sqrt{2}z\right)^2\right)(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)\\
&=\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)
\end{aligned}$$

という因数分解から (最初に $(z^4+1)(z^4-1)$ と分解した段階で、1 と -1 の 4 乗根を合わせたものになることが分かる)[1]

$$z=1,-1,+i,-i,\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2},\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}.$$

[1]最初に $z^8-1=(z-1)(z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$ としてしまうと後が大変。

これは $(\star)$ と一致している。

-1 の 8 乗根、つまり $z^8=-1=1\cdot e^{i\pi}$ の解は、(a) 極形式を利用すると、$e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{8}k\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{8}}$ $(k=0,1,\dots,7)$ であるから、

$$z=e^{i\frac{\pi}{8}},e^{i\frac{3\pi}{8}},e^{i\frac{5\pi}{8}},e^{i\frac{7\pi}{8}},e^{i\frac{9\pi}{8}},e^{i\frac{11\pi}{8}},e^{i\frac{13\pi}{8}},e^{i\frac{15\pi}{8}}.$$

これらは、以下に示すように $\sqrt{}$ を使って具体的に書ける。

例えば $e^{i\pi/8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}$ を求めるために、

(a) $e^{i\pi/4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ は知っているので、その平方根として $e^{i\frac{\pi}{8}}$ を求める。

(b) $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ は知っているので、半角の公式 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$, $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$ を用いて $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ を得て、$e^{i\pi/8}=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ とする。

という方法がある。

-1 の 8 乗根は 8 個あるので、工夫しないと、8 倍の手間がかかる。工夫を考えてみよう。

図を描いてみると、色々な対称性を持っていることが分かる。原点について対称、実軸について対称、虚軸について対称、直線 $\operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z$ について対称。

(i) -1 倍すると、原点について対称な値、例えば $e^{i\frac{\pi}{8}}$ に対して $e^{i\frac{9\pi}{8}}=\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}$ が得られる。

(ii) 虚部を -1 倍すると (共役複素数を取ると)、実軸について対称な値 (偏角を -1 倍した値)、例えば $e^{i\frac{\pi}{8}}$ に対して $e^{-i\frac{\pi}{8}}=e^{i\frac{15\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}$ が得られる。

(iii) 実部を -1 倍すると、虚軸について対称な値、例えば $e^{i\frac{\pi}{8}}$ に対して $e^{i\frac{7\pi}{8}}=\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}$ が得られる。

(iv) 実部と虚部を入れ替えると、直線 $\operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z$ について対称な値、例えば $e^{i\frac{\pi}{8}}$ に対して $e^{i\frac{3\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}$ が得られる。

以上より、-1 の 8 乗根として

$$\frac{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2},\frac{\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}\quad\text{(複号任意)}$$

を得る。

次のような、因数分解による解答も見つかった。

$$\begin{aligned}
z^8+1&=z^8+2z^4+1-2z^4=(z^4+1)^2-\left(\sqrt{2}z^2\right)^2=\left(z^4+1+\sqrt{2}z^2\right)\left(z^4+1-\sqrt{2}z^2\right)\\
&=\left(z^4+2z^2+1-\left(2-\sqrt{2}\right)z^2\right)\left(z^4+2z^2+1-\left(2+\sqrt{2}\right)z^2\right)\\
&=\left(z^2+1+\sqrt{2-\sqrt{2}}z\right)\left(z^2+1-\sqrt{2-\sqrt{2}}z\right)\\
&\quad\times\left(z^2+1+\sqrt{2+\sqrt{2}}z\right)\left(z^2+1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z &= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}-4}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}-4}}{2}, \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}-4}}{2}, \\ &\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}-4}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}, \\ &\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$