複素関数・同演習 宿題 No. 13　(2024 年 1 月 10 日, 1 月 16 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 13

(1) 次の関数の零点とその位数を求めよ。$f(z)=\sin(z^2)$, $g(z)=(\sin z)^{10}$.
(ヒント: c が f の k 位の零点ならば、c は f^ℓ の $k\ell$ 位の零点 — なぜでしょう？)

(2) $f(z)=\dfrac{4z^4+33z^3+96z^2+122z+67}{z^3+7z^2+15z+9}$ について、以下の問に答えよ ($f(z)$ の部分分数分解の結果は、Mathematica で `Apart[(4z^4+33z^3+96z^2+122z+67)/(z^3+7z^2+15z+9)]` として検算せよ)。

(a) -3 のまわりの f の Laurent 展開とその収束範囲 (どの円環領域で収束するか？)、主部を求めよ。

(b) f の極を全て求め、その位数とその点における f の留数を答えよ (もちろん Laurent 展開を求めれば分かるが、部分分数分解の結果だけから分かるはず)。簡単で構わないので根拠を書くこと。

(3) $f(z)=\dfrac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}$ とするとき、(Laurent 展開も部分分数分解もせずに) $\mathrm{Res}(f;-1)$, $\mathrm{Res}(f;-2)$, $\mathrm{Res}(f;-3)$ を求めよ。

問 13 解説

(1) $f(z)=\sin(z^2)$ であり、sin の零点は $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ であるから

$$f(c)=0 \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\quad c^2=n\pi \Leftrightarrow (c=0)\vee\left[(\exists m\in\mathbb{N})c=\pm\sqrt{m\pi}\right]\vee\left[(\exists m\in\mathbb{N})c=\pm\sqrt{m\pi}i\right].$$

すなわち f の零点は $c=0,\pm\sqrt{m\pi},\pm\sqrt{m\pi}i$ $(m\in\mathbb{N})$.

$$f'(z)=2z\cos\left(z^2\right),\quad f''(z)=2\cdot\cos\left(z^2\right)+2z\cdot(-2z)\sin\left(z^2\right).$$

$c^2=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ のとき $\cos(c^2)=(-1)^n\neq 0$.

- $c=\pm\sqrt{m\pi},\pm\sqrt{m\pi}i$ $(m\in\mathbb{N})$ のとき $f'(c)=2c\cos(c^2)\neq 0$. ゆえに c は f の 1 位の零点である。
- $c=0$ については、

$$f(0)=f'(0)=0,\quad f''(0)=2\cos 0=2\neq 0$$

であるから、0 は f の 2 位の零点である。

$g(z)=(\sin z)^{10}$ であるから

$$g(z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin z=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=n\pi.$$

すなわち g の零点は $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$. 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して、$n\pi$ は $\sin z$ の 1 位の零点であるから、

$$\sin z=(z-n\pi)g_n(z),\quad g_n(n\pi)\neq 0$$

を満たす正則関数 $g_n(z)$ が存在する。これから

$$g(z)=(\sin z)^{10}=(z-n\pi)^{10}\left(g_n(z)\right)^{10},\quad \left(g_n(n\pi)\right)^{10}\neq 0.$$

ゆえに、$n\pi$ は g の 10 位の零点である。

(2) (a) $f(z)$ の部分分数分解は (途中経過略で)

$$f(z)=5+4z+\frac{3}{z+1}-\frac{2}{z+3}+\frac{1}{(z+3)^2}.$$

右辺の各部分の -3 における Laurent 展開を求める (最後の 2 項はすでに Laurent 展開の形をしているので、それ以外 — それは正則なので実質的に冪級数展開を求めることになるが、これは既に宿題でやったことがある)。

$$\begin{aligned}
5+4z&=5+4(z+3-3)=-7+4(z+3),\\
\frac{3}{z+1}&=\frac{3}{(z+3-3)+1}=\frac{3}{-2+(z+3)}=\frac{3}{-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+3}{2}}=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{2}\right)^n\\
&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}(z+3)^n\quad(\text{収束}\Leftrightarrow|z+3|<2).
\end{aligned}$$

以上をまとめて

$$f(z)=-\frac{17}{2}+\frac{13}{4}(z+3)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-3}{2^{n+1}}(z+3)^n-\frac{2}{z+3}+\frac{1}{(z+3)^2}\quad(0<|z+3|<2).$$

(Mathematica では、`SeriesCoefficient[f[z],{z,-3,n}]` として検算できる。)
主部は $-\frac{2}{z+3}+\frac{1}{(z+3)^2}$.

(b) f の極は -3 と -1.

-3 については、(a) の Laurent 展開からからすぐに分かる。-3 は2位の極で、$\mathrm{Res}(f;-3)=-2$.

-1 についても、部分分数分解の結果から -1 における Laurent 展開の主部が $\dfrac{3}{z+1}$ であることが分かる ($\because$ $5+4z-\dfrac{2}{z+3}+\dfrac{1}{(z+3)^2}$ は $D(-1;2)$ で正則なので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$ と展開できて、$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n+\dfrac{3}{z+1}$ が Laurent 展開である。a_n を具体的に求めなくても主部は $\dfrac{3}{z+1}$)。

ゆえに -1 は 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;-1)=3$.

(3) -1 は分母の 1 位の零点であるので、-1 は f の高々1位の極であり (実は 1 位の極)

$$\mathrm{Res}(f;-1)=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}=\left.\frac{z+4}{(z+2)^3}\right|_{z=-1}=\frac{-1+4}{(-1+2)^2}=3.$$

-2 は分母の 3 位の零点であるので、-2 は f の高々3位の極であり (実は 3 位の極)

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f;-2)&=\lim_{z\to-2}\frac{1}{2!}\left((z+2)^3\frac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}\right)''=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{z+4}{z+1}\right)''\right|_{z=-2}\\&=\frac{1}{2}\left.\left(1+\frac{3}{z+1}\right)''\right|_{z=-2}=\frac{1}{2}\cdot 2\left.\frac{3}{(z+1)^3}\right|_{z=-2}=-3.\end{aligned}$$

f は -3 の近傍 $D(-3;1)$ で正則なので

$$\mathrm{Res}\,(f;-3)=0.$$

(Mathematica では `Residue[f[z],{z,-1}]` のようにして検算できる。)■