複素関数・同演習 宿題 No. 10　(2023 年 12 月 6 日出題, 12 月 12 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 10　(1) C: $z = 2e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi/2]$) とする時、$\displaystyle\int_C \frac{dz}{(\bar{z})^2}$ の値を求めよ。

(2) $r > 0, c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ のとき、次の線積分の値を求めよ。(a) $\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c}$　(b) $\displaystyle\int_{|z-c|=r} (z-c)^n\, dz$

(3) 次の各曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$ の値を求めよ。　(i) 0 から 1, そして 1 から $1+i$ に至る折れ線　(ii) 0 から i, そして i から $1+i$ に至る折れ線　(iii) 0 から $1+i$ に至る線分

(4) 4 点 0, 1, $1+i$, i を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する曲線を $\mathit{\Gamma}$ とするとき、$\displaystyle\int_\Gamma \operatorname{Re} z\, dz$, $\displaystyle\int_\Gamma (z^2 - 2iz + 3)dz$ の値を求めよ。

補足 `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/memo-toi10.pdf` を見ること。

問 10 解説　多くの人は良く出来ていて、フィードバックをちゃんと読めばそれで OK という感じですが、一部に線積分の定義をきちんと把握せず解答しようとして、おかしなことになっている人がいました。そういう人達は講義ノート (今回少し加筆しました) を参考に、勉強し直してください。

(1) 原始関数が見つからないので、定義に基づき計算する (実は正則関数でない関数は原始関数を持たない、という定理が成り立つので、原始関数が存在しないことが分かる)。

$z = 2e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi/2])$ とするとき、$dz = 2ie^{i\theta}d\theta$ であるから

$$\int_C \frac{dz}{(\overline{z})^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\overline{2e^{i\theta}}\right)^2} \cdot 2ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(2e^{-i\theta})^2} \cdot 2ie^{i\theta}d\theta = \frac{i}{2}\int_0^{\pi/2} e^{3i\theta}d\theta = \frac{i}{2}\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{6}\left(e^{i\frac{3\pi}{2}} - 1\right) = \frac{-1-i}{6}.$$

(2) $|z - c| = r$ は $z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ であり (これは記号についての約束である)、$dz = ire^{i\theta}d\theta$ である。

(a)
$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(c + re^{i\theta} - c)} \cdot ire^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

(b) $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ であるから (次の式の分母 $n+1$ が 0 にならないので)

$$\left(\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)(z-c)^n}{n+1} = (z-c)^n.$$

ゆえに $(z-c)^n$ の原始関数が存在する。$|z-c| = r$ は閉曲線であるから

$$\int_{|z-c|=R} (z-c)^n dz = 0.$$

(3)　(i) C_1: $z = t$ $(t \in [0,1])$, C_2: $z = 1 + it$ $(t \in [0,1])$ とすると、$\gamma = C_1 + C_2$ とみなせる。

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z\, dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(t) \cdot dt + \int_0^1 \operatorname{Im}(1+it) \cdot i\, dt$$
$$= \int_0^1 0\, dt + i\int_0^1 t\, dt = \frac{i}{2}.$$

(ii) C_1: $z = it$ $(t \in [0,1])$, C_2: $z = i + t$ $(t \in [0,1])$ とすると、$\gamma = C_1 + C_2$ とみなせる。

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z\, dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(it) \cdot i\, dt + \int_0^1 \operatorname{Im}(i+t) \cdot dt$$
$$= i\int_0^1 t\, dt + \int_0^1 1\, dt = \frac{i}{2} + 1.$$

(iii) $z = (1+i)t$ $(t \in [0,1])$ を γ とみなせるので

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}((1+i)t) \cdot (1+i)dt = (1+i)\int_0^1 t\, dt = \frac{1+i}{2}.$$

(4) C_1: $z = t$ $(t \in [0,1])$, C_2: $z = 1 + it$ $(t \in [0,1])$, C_3: $z = 1 + i - t$ $(t \in [0,1])$, C_4: $z = i - it$ $(t \in [0,1])$ とおくと、$\Gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z\, dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z\, dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z\, dz + \int_{C_3} \operatorname{Re} z\, dz + \int_{C_4} \operatorname{Re} z\, dz$$
$$= \int_0^1 \operatorname{Re}(t) \cdot dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(1+it) \cdot i\, dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(1+i-t) \cdot (-1)dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(i-it) \cdot (-i)dt$$
$$= \int_0^1 t\, dt + i\int_0^1 1\, dt - \int_0^1 (1-t)dt - i\int_0^1 0\, dt$$
$$= \frac{1}{2} + i \cdot 1 - \frac{1}{2} = i.$$

一方、$z^2 - 2iz + 3$ は多項式関数であるから原始関数を持ち (例えば $\frac{z^3}{3} - iz^2 + 3z$ は原始関数である)、Γ は閉曲線であるから、$\displaystyle\int_\Gamma (z^2 - 2iz + 3)dz = 0.$ ■

```
li[fz_, phit_, a_, b_] :=
 Integrate[(fz /. z -> phit) D[phit, t], {t, a, b}]
li[1/(Conjugate[z])^2,2Exp[I t],0,Pi/2]
```