2022 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2023 年 1 月 30 日 (月曜) 9:30〜11:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

問 5 は必ず解答せよ。それ以外の問から 5 つを選択して (全部で 6 つの問に) 解答せよ。各問の解答の順番は自由である (ただし 1 つの問の解答は一箇所にまとめて書くこと)。

問 1. $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ のとき、$\dfrac{1}{z}$, $\operatorname{Arg} z$, z の極形式, $\operatorname{Log} z$, z の平方根を求めよ (Arg と極形式以外は実部・虚部が分かる形に表せ)。

問 2. (1) $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=(\overline{z})^3$ で定めるとき、f の微分可能性を調べよ。(2) 複素平面の領域 Ω で定義された正則関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v と表すことにする。$u(x,y)=2xy$ のとき v を求めよ。

問 3. z の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(n+5)^6}(z-1)^{2n+3}$ について以下の問に答えよ。

(1) 収束円を求めよ。　(2) 収束円の境界上の点でこの冪級数が収束するかどうか調べよ。

問 4. 関数 $f(z):=\dfrac{2z^4+7z^3+10z^2+13z-5}{z^3+3z^2-4}$ について、以下の問に答えよ。

(1) $f(z)$ の部分分数分解を求めよ。　(2) f を 0 の周りで Laurent 展開せよ。　(3) f を 1 の周りで Laurent 展開せよ。　(4) $A(-2;R,+\infty)$ で f を Laurent 展開できるような最小の正の数 R を求めよ。

問 5. 留数計算を利用して、次の定積分の値を求めよ。

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^8+x^6+x^2+1}$　(2) $I_2=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$　(3) $I_3=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\,dx$

問 6. 次の各用語の定義を述べ、例をあげよ。

(1) 正則関数　(2) 冪級数の収束半径　(3) Laurent 展開と留数

問 7. 以下の (a)〜(e) から 1 つの命題を選んで証明せよ。

(a) f が正則関数ならば、f の実部と虚部は Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(b) $c\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$, c が f の k 位の極であるとき、$\operatorname{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\Big[(z-c)^k f(z)\Big]$.

(c) $c\in\mathbb{R}$, f が c のある近傍で正則、g は c を 1 位の極とするとき、c は $F:=fg$ の高々1 位の極で $\operatorname{Res}(F;c)=f(c)\operatorname{Res}(g;c)$.

(d) 複指数法則 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ (複素指数関数の定義には色々やり方があるが、自分で選んでそれを書き、それに沿った証明をする。)

(e) $c\in\mathbb{C}$, $R>0$, $k\in\mathbb{N}$, $f:D(c;R)\to\mathbb{C}$ が正則であり、$f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$ であるならば、$D(c;R)$ で正則な関数 g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in D(c;R))$ が成り立つ。

問 5 は少し凝りすぎたかもしれません…(追試ではもう少しやさしい問題にします。)
問 1〜4 は標準的で、宿題でも同じようなのを出題したので、解けるようになってほしい。

1 解説　$z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ のとき

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{6}, \quad z = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad \operatorname{Log} z = -i\frac{\pi}{6}.$$

z の平方根は

$$\pm\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i\right).\blacksquare$$

あるいは次のように二重根号を外すこともできます。

$$\pm\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)\right).$$

(偏角の計算間違いをして、後が全部アウトという人がいます。z でなく $\frac{1}{z}$ で計算してしまったり。$e^{-\frac{\pi}{6}}$ と i を書き忘れたり。$e^{\pi-i/6}$ と書いてしまったり (まずいですよね)。先頭大文字で Log と書いたら主値なのに、無限個の値を書いたり。平方根が 1 つしかなかったり 4 つあったり。色々な間違いがありました。)

2 解説

(1) f の実部・虚部を u, v とする。$x, y \in \mathbb{R}$ のとき

$$f(x+iy) = \left(\overline{x+iy}\right)^3 = (x-iy)^3 = x^3 + 3x^2(-iy) + 3x(-iy)^2 + (-iy)^3 = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y + y^3)$$

であるから $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = -(3x^2y + y^3)$. u も v も多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級であり、全微分可能である。

$$u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y(x,y) = -6xy, \quad v_x(x,y) = -6xy, \quad v_y(x,y) = -3x^2 - 3y^2.$$

f が微分可能であるには、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つことが必要十分であるが、

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)(x-y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = y \lor x = -y), \\ u_y = -v_x \quad &\Leftrightarrow \quad 12xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \lor y = 0). \end{aligned}$$

これから

$$(u_x = v_y \land u_y = -v_x) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

ゆえに $z = 0$ で f は微分可能, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で f は微分可能でない。

(2) v は $\mathbb{R}^2$ で微分可能かつ

$$v_x = -u_y = -2x, \quad v_y = u_x = 2y.$$

$V(x,y) := -x^2 + y^2$ とおくと

$$(v(x,y) - V(x,y))_x = -2x - (-2x) = 0, \quad (v(x,y) - V(x,y))_y = 2y - 2y = 0.$$

ゆえに $v(x,y) = V(x,y) + C$ (C は任意の実定数) でなければならない。逆にこのとき v は Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $v(x,y) = -x^2 + y^2 + C$ (C は任意の実数).

((1) 宿題で類題を出したのだけど…出来が悪かったです。$\overline{z}$ あるとなかなか微分可能にならない、と何度か言ったはずですが、微分可能であると言った人が少なくなかった。Cauchy-Riemann 方程式をきちんと覚えていない人が結構いました。(2) で定数 C がない答案が多かったです。)

3 解説

(1) $\zeta := (z-1)^2$, $a_n := \dfrac{4^n}{(n+5)^6}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+5)^6}(z-1)^{2n+3} = (z-1)^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{(n+5)^6} \frac{(n+1+5)^6}{4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+6/n)^6}{4(1+5/n)^6} = \frac{(1+0)^6}{4(1+0)^6} = \frac{1}{4}.$$

ratio-test から、ζ の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ は、収束半径が $\dfrac{1}{4}$ であり、$|\zeta| < \dfrac{1}{4}$ のとき収束し、$|\zeta| > \dfrac{1}{4}$ のとき発散する。

ゆえに与えられた冪級数は、$|z-1| < \sqrt{1/4} = \dfrac{1}{2}$ のとき収束し、$|z-1| > \sqrt{1/4} = \dfrac{1}{2}$ のとき発散する。ゆえに収束円は $D(1;1/2)$ である。

(2) $|z-1| = \dfrac{1}{2}$ のとき、第 n 項の絶対値は

$$\left|\frac{4^n}{(n+5)^6}(z-1)^{2n+3}\right| = \frac{4^n}{(n+5)^6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} = \frac{1}{8(n+5)^6} \quad (n \ge 0).$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8(n+5)^6}$ は収束するので (色々示し方があるが、例えば $\dfrac{1}{8(n+5)^6} \le \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ であるから優級数の定理が使える。)、優級数の定理より、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+5)^6}(z-1)^{2n+3}$ は収束する。 ■

((1) 宿題で類題を出したのだけど…出来が悪かったです。$D(1;1/4)$ とした人が多い。(2) を解けた人が少なかったので、(1) の配点を高めにしました。)

4 解説

(1)

$$f(z) = \frac{2z^4+7z^3+10z^2+13z-5}{z^3+3z^2-4} = 1+2z+\frac{7z^2+21z-1}{(z-1)(z+2)^2} = 1+2z+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{z+2}+\frac{5}{(z+2)^2}.$$

f は有理関数で、定義域は $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{1,-2\}$ であるので、f は Ω で正則である。

(2) f は $D(0;1)$ で正則であるから、その円盤領域で Taylor 展開できる。

$$\frac{3}{z-1} = -3\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \frac{4}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} z^n, \quad \frac{5}{(z+2)^2} = 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}} z^n \quad (\text{収束半径は } 1,\ 2,\ 2)$$

であるから

$$f(z) = \frac{5}{4} - \frac{13}{4}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(5n+13)}{2^{n+1}} - 3\right) z^n \quad (z \in D(0;1)).$$

(ここで止めても満点とします。「Taylor 展開 (冪級数展開) は Laurent 展開だから」。)

これから $A(0;0,1)$ での Laurent 展開が得られる:

$$f(z) = \frac{5}{4} - \frac{13}{4}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(5n+13)}{2^{n+1}} - 3\right) z^n \quad (z \in A(0;0,1)).$$

(3)

$$1+2z=3+2(z-1),$$
$$\frac{4}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n,\quad \frac{5}{(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}(z-1)^n\quad (\text{収束半径はともに }3)$$

であるから

$$f(z)=\frac{44}{9}+\frac{32}{27}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+2}}(5n+17)(z-1)^n+\frac{3}{z-1}\quad (z\in A(1;0,3)).$$

(4) Laurent 展開を求めずに答えられますが、以下では求めてみます。

$1+2z=1+2(z+2-2)=-3+2(z+2)$. 一方

$$\frac{3}{z-1}=\frac{3}{(z+2-2)-1}=\frac{3}{(z+2)-3}=\frac{3}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z+2}}=\frac{3}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^n}.$$

これは等比級数で、収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{3}{z+2}\right|<1 \Leftrightarrow |z+2|>3$.

$$\begin{aligned}f(z)&=-3+2(z+2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^n}+\frac{4}{z+2}+\frac{5}{(z+2)^2}\\&=-3+2(z+2)+\frac{7}{z+2}+\frac{14}{(z+2)^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^n}\quad (z\in A(-2;3,+\infty)).\end{aligned}$$

ゆえに $R=3$. (別解) -1 と 2 の距離は 3 で、$|z+2|>3$ の範囲には特異点がなく正則だから、$R=3$. ■

((1) 宿題で類題を… (2),(3) で収束する範囲を書かなかったら減点。)

5 解説

(1) $f(z):=\dfrac{1}{z^8+z^6+z^2+1}$ とおくと $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^6+1)}=\dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^4-z^2+1)}$. f は偶関数である。

f の極 c は、$c=\pm i$ (2 位), $\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$ (1 位), $\dfrac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$ (1 位). $\operatorname{Im} c>0$ を満たすものは i, $\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$.

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;i)+\operatorname{Res}\left(f;\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)+\operatorname{Res}\left(f;\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\right)\\&=\pi i\left(-\frac{i}{4}-\frac{1}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(2) $e^{-ix}=e^{i(-1)x}$ で、$-1<0$ であるから

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{(x^2+1)^2}dx=-2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c<0}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{(z^2+1)^2};c\right)=-2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{(z^2+1)^2};-i\right)\\&=-2\pi i\lim_{z\to -i}\left(\frac{e^{-iz}}{(z-i)^2}\right)'=-2\pi i\left(-2(z-i)^{-3}e^{-iz}+(z-i)^{-2}(-i)e^{-iz}\right)\Big|_{z=-i}=\cdots=\frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

あるいは

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{(e^{ix})}}{(x^2+1)^2}dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx}=\overline{2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2};c\right)}=\overline{2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2};i\right)}=\cdots=\frac{\pi}{e}$$

(3) (x でなく θ とした方が考えやすかったかな…)

$z = e^{ix}$ とすると、$dx = \dfrac{dz}{iz}, \sin x = \dfrac{z - 1/z}{2i}, \cos x = \dfrac{z + 1/z}{2}$ であるから

$$I_3 = \int_{|z|=1} \frac{1 + \frac{z-1/z}{2i}}{2 + \frac{z+1/z}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = -\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 2iz - 1}{z(z^2 + 4z + 1)}\, dz.$$

$f(z) := \dfrac{z^2 + 2iz - 1}{z(z^2 + 4z + 1)}$ とおく。$z(z^2 + 4 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0, -2 \pm \sqrt{3}$ に注意して、留数定理から

$$I_3 = -2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}\,(f; c) = -2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(f; -2 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{Res}\,(f; 0) \right).$$

ここで

$$\mathrm{Res}\left(f; -2 + \sqrt{3}\right) = \left. \frac{z^2 + 2iz - 1}{(z(z^2 + 4z + 1))'} \right|_{z=-2+\sqrt{3}} = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}, \quad \mathrm{Res}\,(f; 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = -1$$

であるから

$$I_3 = -2\pi i \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} - 1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \blacksquare$$

(1) の $\mathrm{Res}(f; i)$ の計算が工夫が必要で面倒なのですが、出来た人がいました！素晴らしい。(2) で $I_2 = 0$ と答えた人が多い。e^{iax} の $a = -1$ でこれは正でないので、いきなり定理は適用できません。

6 解説

(1) Ω を $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とするとき、f が正則関数であるとは、任意の $z \in \Omega$ に対して、f が z で微分可能であることをいう。

(2) $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を複素数列とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ に対して、ある $\rho \in [0, +\infty]$ がただ 1 つ存在して、$|z - c| < \rho$ ならば収束し、$|z - c| > \rho$ ならば発散する。この ρ を冪級数の収束半径と呼ぶ。

(3) f が円環領域 $A(c; R_1, R_2)$ (ただし $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$) で正則ならば、

$$(\spadesuit) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; R_1, R_2))$$

を満たす $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が存在し、一意的である。($\spadesuit$) を f の $A(cc; R_1, R_2)$ における Laurent 展開と呼ぶ。特に $R_1 = 0$ のとき、a_{-1} のことを f の c における留数とよび、$\mathrm{Res}(f; c)$ と表す。$\blacksquare$

(1) で Cauchy-Riemann 方程式を持ち出した人がいるけれど (実部 u, 虚部 v がともに全微分可能で $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つとき…)、普通は定義を書くものです (その方が簡単だろうし、そもそも「定義を述べよ」という問題です)。(2) は割と良かった。