複素関数・同演習 第23回

〜円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の冪級数展開可能性〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2023/

2023年12月19日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回、有名な “単連結領域における Cauchy の積分定理” を紹介した。それより弱い “星型領域における Cauchy の積分定理” を証明する (証明は原始関数を構成することに基づく)。積分路の変形というテクニックがあるが、星型領域においては積分路が変形できる、という形の補題を提供する。使い慣れるととても便利な定理である。
- いよいよ Cauchy の積分公式を説明する。まず円盤領域における Cauchy の積分公式を証明する。その後は速く事が進む。まずは、正則関数の冪級数展開可能性 (解析性) を示す。この定理の重要性はどれほど強調しても、しすぎにはならないだろう。系として「原始関数が存在すれば正則」という定理, 有名な Morera の定理の証明等々、懸案の課題がクリアできる。2023/12/19 の到達目標はこの辺まで。また冪級数展開の収束半径についても考察する。
- Cauchy の積分公式の証明には、違うやり方を採用しているテキストも多い。参考になると思われるので紹介する (§ 7.3 — 注: 12/19 の授業では省略した)。そのために必要な積分路の変形の証明は、バラエティに富んでいる。それについても説明を用意したが授業では省略する。(積分路の変形に慣れるのは良いことなので、余裕のある人は読むと良い。)

定理 23.1 (星型領域における Cauchy の積分定理, 積分路の変形)

Ω は $\mathbb{C}$ の**星型領域** (例えば円盤領域)、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則 (あるいは、ある 1 点 c を除いた $\Omega\setminus\{c\}$ で正則で、Ω で連続) とするとき、f の原始関数が存在する。

ゆえに Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0.$

また任意の $p,q\in\Omega$ に対して、p, q をそれぞれ始点、終点とする Ω 内の任意の区分的 C^1 級曲線 C_1, C_2 に対して、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz$ が成り立つ。

証明のあらすじ: 星型であるから、ある $a\in\Omega$ が存在して、$(\forall z\in\Omega)\ [a,z]\subset\Omega.$

実は $\displaystyle F(z):=\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta\ (z\in\Omega)$ とおくと、$F'=f$ となる。実際、任意の $z_0\in\Omega$ に対して、ある ε が存在して $D(z_0;\varepsilon)\subset\Omega$. $0<|h|<\varepsilon$ を満たす h に対して、a, z_0, z_0+h を頂点とする三角形 Δ は Ω に含まれる。三角形版 Cauchy の積分定理より $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0.$

ゆえに $\displaystyle F(z_0+h)-F(z_0)=\int_{[z_0,z_0+h]} f(\zeta)d\zeta.$ 前回と同様に $F'(z_0)=f(z_0)$ が示せる。

ゆえに $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0.$ $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz-\int_{C_2} f(z)\,dz=\int_{C_1-C_2} f(z)\,dz=0.$ $\square$

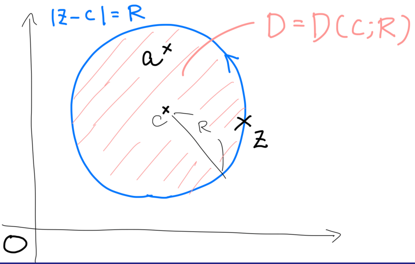
いよいよ主役 Cauchy の積分公式の登場である。まずは円盤の場合から。

定理 23.2 (円盤における Cauchy の積分公式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ とする。このとき任意の $a \in D$ に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

円周上の f の値から円盤内の点での f の値が求まる。



a を変数と見る場合も多い。そのときは、積分変数 z を ζ に書き換え、a を z と書き換えて

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\quad (z\in D)$$

とすると見やすい。この右辺は、何回でも積分記号下の微分が出来る (その事実の証明 (サボります) には、f が正則である必要はなく、f は連続であればよい)。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

右辺の微分を実行すると、次の定理が得られる (f が無限回微分可能と分かる)。

系 23.3 (Goursat の定理、と言われることがあるそうです)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$, $D:=D(c;R)$ とおくとき $\overline{D}\subset\Omega$ とする。このとき任意の $z\in D$, $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

定理 23.2 の証明のために補題を 2 つ用意する。

補題 23.4 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

補題 23.4 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

証明　$a \notin \Delta$ のときは、前と同じ証明で良い。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 23.4 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

証明　$a \notin \Delta$ のときは、前と同じ証明で良い。

$a \in \Delta$ とする。以下の 3 つのうちのいずれかが成り立つ。

1. a は Δ のある頂点
2. a は Δ のある辺上にあるが、頂点ではない
3. a は Δ の内部にある。

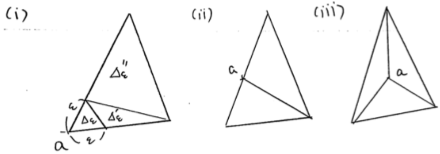


図 1: a が三角形 Δ のどこにあるかで場合分け (頂点, 頂点でない辺上, 内部)

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。a を含まない三角形 Δ'_ε, Δ''_ε では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\Delta}|f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \le 4\varepsilon \max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

$\varepsilon \to +0$ とすることで $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。a を含まない三角形 Δ'_ε, Δ''_ε では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\Delta}|f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \le 4\varepsilon \max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

$\varepsilon \to +0$ とすることで $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が 0 であることが導かれる。 □

三角形版 Cauchy の積分定理が一般化されたので、それを用いて証明された星型領域における Cauchy の積分定理も一般化できる。

系 23.5 (星型領域における Cauchy の積分定理の一般化)

星型領域における Cauchy の積分定理の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

三角形版 Cauchy の積分定理が一般化されたので、それを用いて証明された星型領域における Cauchy の積分定理も一般化できる。

系 23.5 (星型領域における Cauchy の積分定理の一般化)

星型領域における Cauchy の積分定理の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

証明　もともとの f が正則という仮定は、定理 21.3 の中で、$F(z) = \displaystyle\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$ が

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta$$

を満たすことの証明に使った。そこで三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) を用いたが、それが微分可能性を仮定しない点 (ただしその点での連続性は仮定) の存在を許せることが分かった。 □

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

次を定理 23.2 の証明で用いる。

補題 23.6 (とても重要な線積分)

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

(注意: $|c-a| = r$ とすると、積分路の途中で被積分関数の分母が 0 となるので、その場合は除外しておくことにする。)

この結果は、後で当たり前に思えるようになるが、今証明するのはちょっとした仕事である。まずは、これを認めて懸案の定理 23.2 の証明を片付けよう。

定理 23.2 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

定理 23.2 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

　十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $D(c; R+\varepsilon) \subset \Omega$. $|z - c| = R$ を C とおくと、C は $D(c; R+\varepsilon)$ 内の C^1 級の閉曲線である。星型領域における Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a}\,dz - f(a)\int_C \frac{dz}{z - a}.$$

定理 23.2 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $D(c; R + \varepsilon) \subset \Omega$. $|z - c| = R$ を C とおくと、C は $D(c; R + \varepsilon)$ 内の C^1 級の閉曲線である。星型領域における Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_C g(z)\, dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz - f(a) \int_C \frac{dz}{z - a}.$$

$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$ であるから

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad \square$$

補題 23.6 の証明

$|c-a|>r$ のとき。(直観的には赤いバッテンが $|z-c|=r$ の外にあるので積分は 0 である。) $r<R<|c-a|$ を満たす R を取ると、$\dfrac{1}{z-a}$ は星型領域 $D(c;R)$ で正則で $|z-c|=r$ はその中にあるので、星型領域における Cauchy の積分定理により

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=0.$$

以下では、$|c-a|<r$ のとき

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i$$

であることの証明を2つ紹介する。1つは積分路 $|z-a|=\delta$ $(z=\delta e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi]))$ と変形して

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}=2\pi i$$

とする (最後の等式は $z=\delta e^{i\theta}$ とおいて計算できる)。もう1つは被積分関数を変形する方法である。

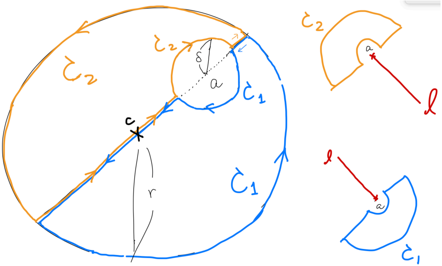
7.1 円盤における Cauchy の積分公式

$|c-a|<r$ の場合の証明 1 — 積分路の変形を用いる　2 つの閉曲線 C_1, C_2 を図のように取る。それぞれ a を端点とする半直線の補集合に含まれるので、星型領域における Cauchy の積分定理によって、$\dfrac{1}{\zeta-a}$ の積分は 0 である。これから

$$0=0+0=\int_{C_1}\frac{dz}{z-a}+\int_{C_2}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}-\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}.$$

移項して

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}=2\pi i.\qquad\square$$



7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 23.7 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 23.7 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 23.7 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 23.7 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f_n(z)-f(z)|\,|dz| \le \max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C |dz|.$$

最後の $\displaystyle\int_C |dz|$ は C の弧長である (n によらない有限の数)。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 23.7 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz-\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C|f_n(z)-f(z)|\,|dz|\le\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C|dz|.$$

最後の $\displaystyle\int_C|dz|$ は C の弧長である (n によらない有限の数)。

$\{f_n\}$ が C^* で f に一様収束とは、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|=0$ を意味するので、

$$\int_C f_n(z)\,dz\to\int_C f(z)\,dz\quad(n\to\infty).\quad\square$$

補題 23.6 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 23.6 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|\text{公比}|=\left|\frac{a-c}{z-c}\right|=\frac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。

補題 23.6 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|公比|=\left|\dfrac{a-c}{z-c}\right|=\dfrac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。ゆえに命題 23.7 より項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz.$$

すでに何度か見たように、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}=2\pi i\delta_{n0}$ であるから、$n=0$ の項のみ残り

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i.\quad\square$$

定理 23.8 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$, $D:=D(c;R)$ とおくとき $\overline{D}\subset\Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,\cdots)$$

とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D).$$

定理 23.8 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D).$$

証明　円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

定理 23.8 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$, $D:=D(c;R)$ とおくとき $\overline{D}\subset\Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,\cdots)$$

とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D).$$

証明　円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の $z\in D$ に対して

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

次の変形は少し長いが、すでによく知っているものである。

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)}=\frac{1}{\zeta-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}}=\frac{1}{\zeta-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}.$$

7.2.1 正則関数の解析性

ゆえに

(1)
$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

　ゆえに

$$(1) \qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max |f|}{R} r^n$ とおくと、$|$一般項$| \le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。

ゆえに

$$(1) \qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max |f|}{R} r^n$ とおくと、$|$一般項$| \le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに項別積分が可能で

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \quad \square$$

7.2.1 正則関数の解析性

ゆえに

$$(1)\qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)|\,\frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta\in C^*}|f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max|f|}{R} r^n$ とおくと、$|\text{一般項}| \le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに項別積分が可能で

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)\,(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-c)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n. \quad \square$$

…… 重要な定理が、こんなに手早く (スライド 1 枚半で) 証明できるとは。ここは関数論の 1 つのクライマックスだろう。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 23.9 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

定理 23.8 より「任意の正則関数は解析的である」。

定義 23.9 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** **(analytic)** であるといい、解析的な関数を**解析関数** **(analytic function)** と呼ぶ。

定理 23.8 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

定義 23.9 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

定理 23.8 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

系 23.10

正則関数は何回でも微分可能である。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 23.9 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

定理 23.8 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

系 23.10

正則関数は何回でも微分可能である。

証明 正則関数は定義域の各点の近傍で冪級数展開可能であり、冪級数は何回でも微分可能であるから。 □

7.2.1 正則関数の解析性

系 23.11

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

系 23.11

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明　複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 □

2023/12/19 の授業内容はここまでです。

参考文献