複素関数・同演習 第25回

～Laurent 展開, 孤立特異点, 留数 (2)～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022年12月21日

目次

本日の内容・連絡事項

- Laurent 展開の例をいくつかあげる。極とその位数の判定法を学ぶ (零点とその位数の特徴づけと関連が深いし、似ているところも多い、混同しないこと)。留数を求める話もいくつか出てくる。
- 宿題 12 を出します。
- 宿題のうち、〆切は過ぎたけれどまだ解説していないものについては、今週中に WWW で解答を発表します。フィードバックも順次行います。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

思い出してもらうため、前回終わり頃のスライドを再提示。

定義 25.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c; 0, \varepsilon)$ で正則であり、$D(c; \varepsilon)$ では正則でないことをいう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

思い出してもらうため、前回終わり頃のスライドを再提示。

定義 25.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

このとき、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,\varepsilon))$$

が成り立つ (定理**??**)。

a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ で表す。

展開結果 (1) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

思い出してもらうため、前回終わり頃のスライドを再提示。

定義 25.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

このとき、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,\varepsilon))$$

が成り立つ (定理??)。

a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ で表す。

展開結果 (1) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

1. c が f の**除去可能特異点** (removable singularity) であるとは

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{-n}=0\quad (\text{つまり } f \text{ の Laurent 展開の主部が } 0)$$

が成り立つことをいう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

定義 25.1 (つづき)

(ii) c が f の**極** (pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N})\,(a_{-k} \neq 0 \land (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0)$$

$$\text{つまり}\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の k **位の極**であるという。

定義 25.1 (つづき)

(ii) c が f の**極** (pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N})\,(a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0)$$

$$\text{つまり}\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の **k 位の極**であるという。

(iii) c が f の**真性特異点** (essential singularity) であるとは

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} \neq 0$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が無限個ある

が成り立つことをいう。

注意 25.2

1. この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [1]) の定義とは異なる。[1] では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、f が $D(c;\varepsilon)$ で正則である (つまり悪い点でない, 特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が "悪い" 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)

注意 25.2

1. この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [1]) の定義とは異なる。[1] では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、f が $D(c;\varepsilon)$ で正則である (つまり悪い点でない, 特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が "悪い" 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)
2. (なぜ「除去可能特異点」と呼ぶか) (i) の場合、任意の $z\in D(c;\varepsilon)$ に対して
$$\widetilde{f}(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$
は収束するので、$\widetilde{f}$ は (c を含んだ) $D(c;\varepsilon)$ で正則で、
$$f(z)=\widetilde{f}(z)\quad(z\in A(c;0,\varepsilon)),\quad \widetilde{f}(z)=\begin{cases}f(z) & (z\in A(c;0,\varepsilon))\\ a_0 & (z=c).\end{cases}$$
つまり、$z=c$ で f の値を a_0 であるように定義を修正した $\widetilde{f}$ は、$D(c;\varepsilon)$ で正則である。「除去可能」という言葉のニュアンスが分かる。なお、$a_0=\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}}f(z)$ であることに注意する。

注意 25.3 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 25.3 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

   実は、c を f の孤立特異点とするとき、

   a. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)$ が存在する。
   b. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)=\infty$.
   c. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq\infty$)。

   が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。

注意 25.3 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

   実は、c を f の孤立特異点とするとき、

   a. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)$ が存在する。
   b. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)=\infty$.
   c. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{z\to c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq\infty$)。

   が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。
   (a), (b) の $\Rightarrow$ の証明は簡単である。実際、

   - 収束冪級数は正則、特に連続なので $\displaystyle\lim_{z\to c}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n=a_0$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\sim\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}\to\infty\ (z\to c).$

注意 25.4 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (例えば Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。

注意 25.4 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (例えば Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。
4. 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる。ここの条件が成り立つ場合は「孤立真性特異点とは」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。 □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

第 25 回 (2022/12/21) の実質的内容はこのスライドからです。

以下、Laurent 展開の例を紹介する。

- 実際に孤立特異点の周りで Laurent 展開してみて、それで 3 つのうちどの特異点であるかを判定する例から始める。
  - 有理関数の場合は、冪級数展開のときと同様に、部分分数分解してから、$\dfrac{1}{(z-a)^m}$ については
    - $m=1$ の場合は
    $$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}$$
    としてから等比級数の和の公式を使う。
    - $m>1$ の場合は、まず $\dfrac{1}{z-a}$ を展開してから、$m-1$ 回微分する (級数は項別微分できる)。
  - 初等関数などは既知の Taylor 展開などが利用できる。
- 極の位数や留数を知るため、Laurent 展開することをサボるやり方を考える。

例 25.5

$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{2\})$. f は $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

例 25.5

$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{2\})$. f は $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C}\setminus\{2\}$ は円環領域 $A(2;0,+\infty)$ である。f の 2 のまわりの Laurent 展開は $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ (f 自身) である。実際、

$$a_{-1}:=1,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

とすると

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-2)^n}\quad (z\in A(2;0,+\infty)).$$

例 25.5

$f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{2\})$. f は $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C} \setminus \{2\}$ は円環領域 $A(2; 0, +\infty)$ である。f の 2 のまわりの Laurent 展開は $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ (f 自身) である。実際、

$$a_{-1} := 1, \quad a_n := 0 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

とすると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-2)^n} \quad (z \in A(2; 0, +\infty)).$$

この Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z-2}$. $\operatorname{Res}(f; 2) = a_{-1} = 1$. 2 は f の 1 位の極である。 □

例 25.6

(2)
$$f(z) = \frac{3}{(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

例 25.6

(2)
$$f(z)=\frac{3}{(z-1)^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}).$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ で正則である。ゆえに 1 は f の唯一の孤立特異点である。

例 25.6

(2)
$$f(z) = \frac{3}{(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

f は $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ で正則である。ゆえに 1 は f の唯一の孤立特異点である。

$\mathbb{C} \setminus \{1\}$ は円環領域 $A(1; 0, +\infty)$ である。(2) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。実際、
$$a_{-2} := 3, \quad a_n := 0 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\})$$
とすると
$$\frac{3}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-1)^n} \quad (z \in A(1; 0, +\infty)).$$

例 25.6

(2)
$$f(z)=\frac{3}{(z-1)^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}).$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ で正則である。ゆえに 1 は f の唯一の孤立特異点である。

$\mathbb{C}\setminus\{1\}$ は円環領域 $A(1;0,+\infty)$ である。(2) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。実際、

$$a_{-2}:=3,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\})$$

とすると

$$\frac{3}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-1)^n}\quad (z\in A(1;0,+\infty)).$$

この Laurent 展開の主部は $\dfrac{3}{(z-1)^2}$. $\mathrm{Res}(f;1)=a_{-1}=0$. 1 は f の 2 位の極である。 □

以下、一般の有理関数を考えよう。

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数)

有理関数 $f(z) = \dfrac{z^3 - 7z^2 + 26z - 30}{z^3 - 5z^2 + 3z + 9}$ について、

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数)

有理関数 $f(z)=\dfrac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9}$ について、まず部分分数分解する。

$$f(z)=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}.$$

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数)

有理関数 $f(z)=\dfrac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9}$ について、まず部分分数分解する。

$$f(z)=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}.$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{3,-1\}$ で正則であり、3 と -1 は孤立特異点である。

$1-\dfrac{4}{z+1}$ は $D(3;4)$ で正則であり、3 の周りに冪級数展開できる (やり方は説明済み):

$$1-\frac{4}{z+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n \quad (z\in D(3;4) \text{ すなわち } |z-3|<4).$$

ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2} \quad (0<|z-3|<4).$$

これは f の 3 の周りの Laurent 展開である。ゆえに 3 は f の 2 位の極であり、$\mathrm{Res}(f;3)=2$.

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ が得られる。

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ が得られる。

しかし、極の位数や留数を求めるだけならば、Laurent 展開を具体的に求める必要はない。孤立特異点 -1 について、それを実行してみよう。

$1+\dfrac{2}{z-3}+\dfrac{3}{(z-3)^2}$ は $D(-1;4)$ で正則であるから、-1 の周りに冪級数展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad 1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n\quad (z\in D(-1;4) \text{ すなわち } |z+1|<4).$$

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ が得られる。

しかし、極の位数や留数を求めるだけならば、Laurent 展開を具体的に求める必要はない。孤立特異点 -1 について、それを実行してみよう。

$1+\dfrac{2}{z-3}+\dfrac{3}{(z-3)^2}$ は $D(-1;4)$ で正則であるから、-1 の周りに冪級数展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad 1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n \quad (z\in D(-1;4) \text{ すなわち } |z+1|<4).$$

これから

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n-\frac{4}{z+1}\quad (0<|z+1|<4).$$

これが f の -1 の周りの Laurent 展開である。a_n を具体的に求めていないが、-1 は f の 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;-1)=-4$ であることがわかる。結局、部分分数分解をした段階で、これらが分かることに注意しよう。

例 25.8 (有理関数以外の極の例)

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

例 25.8 (有理関数以外の極の例)

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

sin の 0 のまわりの冪級数展開 $\sin z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ $(z \in \mathbb{C})$ から

$$(\star) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} + \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である。

例 25.8 (有理関数以外の極の例)

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

sin の 0 のまわりの冪級数展開 $\sin z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$ $(z\in\mathbb{C})$ から

$$(\star)\quad f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}+\frac{1}{z}\quad (0<|z|<+\infty).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である。実際

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n\geq 0,\ n \text{ は奇数のとき。} k=\frac{n+1}{2} \text{ とおくと } k\in\mathbb{Z},\ n=2k-1)\\ 1 & (n=-1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

とおくと、$(\star)$ の右辺は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ の形をしている。また、この Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z}$ であり、0 は f の 1 位の極、$\mathrm{Res}(f;0)=a_{-1}=1$. □

例 25.9 (除去可能特異点)

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}\quad (z\in A(0;0,+\infty)).$$

上とほとんど同じなので、議論を少しスキップして、

例 25.9 (除去可能特異点)

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \quad (z \in A(0; 0, +\infty)).$$

上とほとんど同じなので、議論を少しスキップして、主部は 0 であるから、0 は f の除去可能特異点である。 $\square$

例 25.10 (孤立真性特異点)

$f(z) = \exp \dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

例 25.10 (孤立真性特異点)

$f(z) = \exp\frac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

であるから

$$f(z) = \exp\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

例 25.10 (孤立真性特異点)

$f(z) = \exp\frac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

であるから

$$f(z) = \exp\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である (実際、$a_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 1$, $a_{-n} = \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると⋯)。

例 25.10 (孤立真性特異点)

$f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n\quad(\zeta\in\mathbb{C})$$

であるから

$$f(z)=\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\quad(0<|z|<+\infty).$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である (実際、$a_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$, $a_0=1$, $a_{-n}=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$ とすると$\cdots$)。

この Laurent 展開の主部は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ であり、(0 でない項が無限個あるので) 0 は f の真性特異点である。また $\mathrm{Res}(f;1)=a_{-1}=\dfrac{1}{1!}=1.$ □

例 25.11 (孤立特異点でない「特異点」)

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

f は $z=0$ で定義されない (明らか)。

それ以外に $\sin\frac{1}{z}=0$ となる z に対しても定義されない。つまり、この f は、$\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n\pi}\;\middle|\;n\in\mathbb{Z}\right\}$ に属する点では定義されない。

0 は f の孤立特異点ではない。しかし、これも真性特異点と呼ばれる。 □

Laurent 展開を求めるのは結構大変というか手間がかかる。なるべく求めずに色々なことを分かりたい (特異点の種類、極の場合のその位数、留数が分かれば十分がことが多い)。

定理 25.12 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

定理 25.12 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

証明 (i) ⇒ (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq -k}) \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0.$$

10.3 極とその位数の特徴付け

定理 25.12 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

証明　(i) ⇒ (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq -k}) \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0.$$

このとき

$$(z-c)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'-k} (z-c)^{n'} \quad (0 < |z-c| < R).$$

10.3 極とその位数の特徴付け

定理 25.12 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

証明 (i) ⇒ (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq -k}) \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0.$$

このとき

$$(z-c)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'-k} (z-c)^{n'} \quad (0 < |z-c| < R).$$

$$g(z) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-c)^n & (z \in D(c; R)) \\ (z-c)^k f(z) & (z \in U \setminus D(c; R)) \end{cases}$$

とおくと、g は条件を満たす ($g(c) = a_{-k} \neq 0$ に注意)。

証明 (続き) (ii) $\Rightarrow$ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

証明 (続き)　(ii) $\Rightarrow$ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} &= \frac{b_0}{(z-c)^k} + \frac{b_1}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}, \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{(z-c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 □

10.3 極とその位数の特徴付け

証明 (続き)　(ii) $\Rightarrow$ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-c)^k} = \frac{b_0}{(z-c)^k} + \frac{b_1}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}, \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{(z-c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 □

k 位の零点と対比して覚えることを勧める ($f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$)。

10.3 極とその位数の特徴付け

証明 (続き) (ii) $\Rightarrow$ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} &= \frac{b_0}{(z-c)^k} + \frac{b_1}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}, \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{(z-c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 □

k 位の零点と対比して覚えることを勧める $(f(z) = (z-c)^k g(z),\ g(c) \neq 0)$。

Laurent 展開をしなくても、極かどうか、その位数は何か、分かることが重要である。

例 25.13

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？

例 25.13

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？

0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

例 25.13

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？
　0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

　それでは

$$g(z) = \frac{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

は？

例 25.13

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？
0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

それでは

$$g(z) = \frac{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

は？実は、2 は f の除去可能特異点である。実際

$$h(z) := \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2}$$

とおくと、$g(z) = h(z)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{2\})$ であり、h は 2 の近傍 $D(2;1)$ で正則であるから、

$$(\exists \{a_n\}_{n\geq 0})\ h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n \quad (z \in D(2;1)).$$

ゆえに $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ $(z \in A(2;0,1))$. ゆえに 2 は g の除去可能特異点である。 □

参考文献

[1] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.