複素関数・同演習 第 11 回

～ 冪級数 (3) 収束半径 (続き), 一様収束 ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/`

2022 年 10 月 25 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 宿題5の提出先の準備が遅れたので (うっかりしていました)、宿題5の〆切は10月26日10:50とします。そのため、宿題5の解説は10月26日の2限に行います。
- 先週やるはずだった、宿題4の解説をします。
- 宿題6は次回 (10月26日2限) に出します。
- 冪級数の3回目。まず3.2.2 (1枚) を済ませた後、3.2.3を飛ばして、3.2.4の定理11.3の証明を済ませる。それから3.3「一様収束」に飛ぶ。

3.2.2 収束半径の求め方の考え方

冪級数の収束について、次のように考えることを勧める。

冪級数は等比級数に近いので、等比級数と比べて収束半径を求める

$a_n(z-c)^n \sim r^n$ とみなす。$|r|$ に相当するものがどのようにして求められるか?

(a) 比を取る $\left(\left|r^{n+1}\right| / |r^n| = |r|\right)$。

$$|r| \sim \frac{\left|a_{n+1}(z-c)^{n+1}\right|}{|a_n(z-c)^n|} = |z-c|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である (d'Alembert, ratio test)。

(b) n 乗根を取る $\left(\sqrt[n]{|r|^n} = |r|\right)$。

$$|r| \sim \sqrt[n]{|a_n(z-c)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z-c|$$

であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z-c|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である。実は lim を lim sup とすることが出来て、究極の答えになる (Cauchy-Hadamard の公式)。

0 月 25 日の講義では次の 3.2.3 を飛ばして進みます。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので強くは推めないが、紹介はしておく。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので強くは推めないが、紹介はしておく。

定理 11.1 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1}$$

ここで $\limsup$ は**上極限**を表す (定義は次のスライド)。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので強くは推めないが、紹介はしておく。

定理 11.1 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1}$$

ここで lim sup は**上極限**を表す (定義は次のスライド)。

- 任意の数列 $\{a_n\}$ に対して、$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (1) が適用できる。これは大きな長所である。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので強くは推めないが、紹介はしておく。

定理 11.1 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

(1) $$\rho = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

ここで lim sup は**上極限**を表す (定義は次のスライド)。

- 任意の数列 $\{a_n\}$ に対して、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、lim sup を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨することにする。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

一応 lim sup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ がすぐ求められるかもしれない。(例えば $\limsup_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=1$.)

上極限の定義

$\{a_n\}$ を実数列, $\lambda\in\mathbb{R}$ とする。$\limsup_{n\to\infty} a_n=\lambda$ とは、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\ge N)\ a_n<\lambda+\varepsilon.$
   これは十分大きい任意の n に対して $a_n<\lambda+\varepsilon$ が成り立つ、ということ。
2. $(\forall\varepsilon>0)\ (\forall N\in\mathbb{N})\ (\exists n\in\mathbb{N}\colon\ n\ge N)\ a_n>\lambda-\varepsilon.$
   これは $a_n>\lambda-\varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということ。

- $\limsup_{n\to\infty} a_n=+\infty$ とは、任意の $U\in\mathbb{R}$ に対して、$a_n>U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。
- $\limsup_{n\to\infty} a_n=-\infty$ とは、$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ を満たす、ということ。

上極限について、詳しいことが知りたければ、例えば杉浦 [1] V.1 を見よ。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 11.2 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版)

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 11.2 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版)

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明.

「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ が確定すれば $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty} A_n$」(これは簡単に示せる) が成り立つから。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに次のように約束しておく。

$$\frac{1}{0}=+\infty,\qquad \frac{1}{+\infty}=0.$$

次の 3.2 .4 「ratio test」は、定理 11.3 の証明以外は、前回 (10 月 18 日) の授業で解説済みである。このスライドには、読みやすさを考えて、前回説明した分も合わせて収録しておく。

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\displaystyle\rho:=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\displaystyle\rho:=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z|<\rho$ を満たすとする。$|z|<R<\rho$ となる R をとる。

ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\geq N)$ $\displaystyle\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|>R$ が成り立つ。

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho := \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z|<\rho$ を満たすとする。$|z|<R<\rho$ となる R をとる。

ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\geq N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|>R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。$m\geq 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m}z^{N+m}\right|=\left|a_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}z^Nz^m\right|\leq\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho:=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z|<\rho$ を満たすとする。$|z|<R<\rho$ となる R をとる。

ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\ge N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|>R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。$m\ge 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m}z^{N+m}\right|=\left|a_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}z^Nz^m\right|\le\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると任意の $n\ge N$ に対して

$$|a_nz^n|\le\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

(次のスライドに続く)

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad (収束).$$

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{|a_N z^N|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \ge \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1-|z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \ge \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、$a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{|a_N z^N|}{1 - |z|/R} \quad (収束).$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \ge \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、$a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、ρ は収束半径である。 □

次の 3.2 5 「例」は、前回 (10 月 18 日) の授業で解説済みであるので、今回は (もちろん) 説明しないが、話の順番としてはこの後に続くべきものなので、スライドには再録しておく。

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 11.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.
これは色々なやり方で証明できる。

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 11.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.\ \rho = 1.\ \text{収束円は}\ D(0;1).$$

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 11.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad \rho = 1. \text{ 収束円は } D(0;1).$$

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 11.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$.

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 11.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.
これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$.

3.2.5 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 11.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c_0}{R} \right)^n$ の収束半径を調べよう。

3.2.5 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 11.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

3.2.5 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 11.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

3.2.5 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 11.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\dfrac{z - c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$収束 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z - c_0}{R}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - c_0| < R.$$

3.2.5 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 11.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\dfrac{z-c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$\text{収束} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-c_0}{R}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-c_0| < R.$$

ゆえに ($|z-c_0| < R$ で収束、$|z-c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R. 収束円は $D(c_0; R)$. □

3.2.5 例

例 11.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

例 11.6

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n.$　　このとき $c=0$, $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ $(n\in\mathbb{N})$ である。

3.2.5 例

例 11.6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n.$$ このとき $c=0,\ a_n=\dfrac{1}{n^2}\ (n\in\mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=(1+0)^2=1.$$

ゆえに ratio test より $\rho=1$. 収束円は $D(0;1)$.

3.2.5 例

例 11.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

例 11.7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

3.2.5 例

例 11.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

例 11.7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

このとき $c = 0$, $a_n = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

3.2.5 例

例 11.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n. \qquad \text{このとき } c = 0,\ a_n = \frac{1}{n^2}\ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

例 11.7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n. \qquad \text{このとき } c = 0,\ a_n = n^2\ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

3.2.5 例

例 11.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

例 11.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

例 11.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$.

3.2.5 例

例 11.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$.

例 11.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

3.2.5 例

例 11.8

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$. このとき $c=0$, $a_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho=+\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$.

例 11.9

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$. このとき $c=0$, $a_n=n!$ $(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

ゆえに ratio test より $\rho=0$. 収束円は $\emptyset$.

3.2.5 例

(簡単なまとめ)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c, 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、k が何であっても 1.
- $c \neq 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{|c|}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径はそれぞれ 0, $+\infty$.

例 11.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

例 11.10

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

このとき $c=1$, $a_n=\dfrac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$, $a_0=0$ である。

例 11.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

このとき $c=1$, $a_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-2)^{n-1}/n\right|}{\left|(-2)^n/(n+1)\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1;1/2)$.

例 11.11

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$ (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

3.2.5 例　特にマスターして欲しい例

例 11.11

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$ (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数}, k \text{ を } n=2k+1 \text{ で定めて})\\ 0 & (n \text{ は偶数}).\end{cases}$$

$a_n=0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。

例 11.11

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$ (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数}, k \text{ を } n=2k+1 \text{ で定めて})\\ 0 & (n \text{ は偶数}).\end{cases}$$

$a_n=0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。

$\zeta := z^2$ とおくと [a]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k.$$

[a] 共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

例 11.11 (つづき)

　そこで

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

例 11.11 (つづき)

そこで

$$(\star)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho=+\infty$.

例 11.11 (つづき　別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 11.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n\text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、

例 11.11 (つづき　別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 11.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明})$$

であるから、

例 11.11 (つづき　別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 11.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n\text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明}) \tag{2}$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

3.2.5 例　特にマスターして欲しい例

例 11.11 (つづき　別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 11.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n\text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明})$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. ゆえに系 11.2 の公式から、$\rho = \frac{1}{0} = +\infty$ である。

3.2.5 例　ratio test の使えない例

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$$

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$$ の収束半径を調べよう。

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ も収束する。

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

別解　上極限の定義から $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. ゆえに Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$. □

簡単のため、まず $\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

簡単のため、まず $\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

簡単のため、まず $\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)\,dx.$

簡単のため、まず $\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n=\sum_{k=1}^n a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^\infty a_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b a_n(x)\,dx.$

一方

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり lim と微分の順序交換)

簡単のため、まず $\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n=\sum_{k=1}^n a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^\infty a_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b a_n(x)\,dx.$

一方

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり lim と微分の順序交換)

注　級数の場合は $\left(\sum_{n=1}^\infty a_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^\infty a_n'(x).$

冪級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分。**一様収束が便利**。

3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

定義 11.13 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各 n に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

定義 11.13 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各 n に対して $f_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、

$$(\forall z_0\in\Omega)\quad \lim_{n\to\infty} f_n(z_0)=f(z_0)$$

が成り立つことをいう。

3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

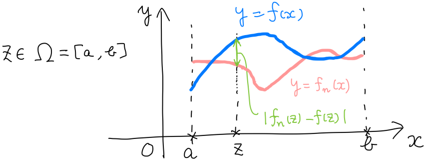
定義 11.13 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各 n に対して $f_n\colon \Omega\to\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とする。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、
$$(\forall z_0\in\Omega)\quad \lim_{n\to\infty} f_n(z_0)=f(z_0)$$
が成り立つことをいう。
2. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **一様収束**するとは、
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|=0$$
が成り立つことをいう。

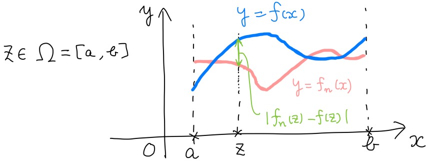
3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)



3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)



$\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|$ (赤線で描き込んでみよう) は、f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するということで、一様収束は自然な概念である。

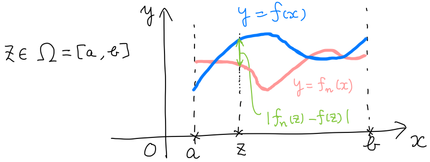
- 一般に「$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0\in\Omega$ に対して

$$|f_n(z_0)-f(z_0)|\le\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

であるから、$\lim_{n\to\infty}f_n(z_0)=f(z_0)$ が成り立つ。

(**注意** 極限が共通であるので、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様収束するか調べるには、各点収束の極限 f を求めて、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するかを調べれば良い。)

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)



$\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|$ (赤線で描き込んでみよう) は、f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するということで、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0\in\Omega$ に対して

$$|f_n(z_0)-f(z_0)|\le\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

であるから、$\lim_{n\to\infty}f_n(z_0)=f(z_0)$ が成り立つ。

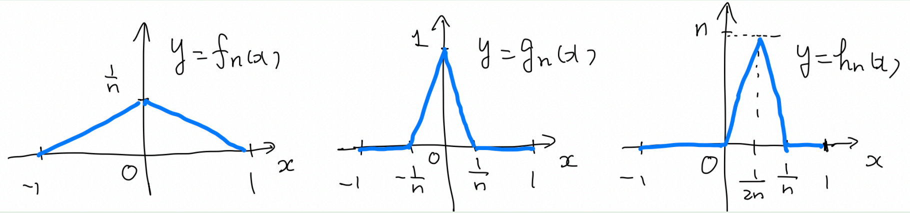
(**注意**　極限が共通であるので、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様収束するか調べるには、各点収束の極限 f を求めて、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するかを調べれば良い。)

しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。

3.3.2 例

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

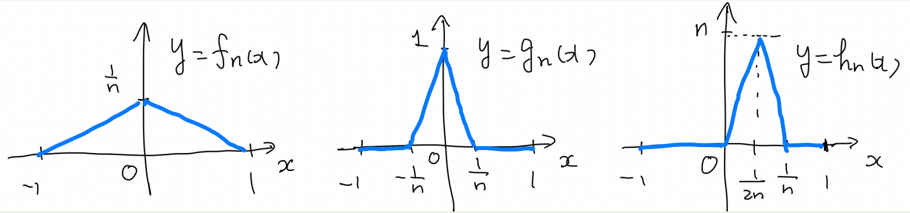
$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。



3.3.2 例

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。

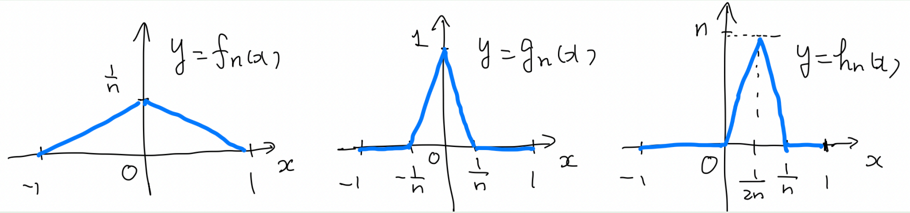


いずれも各点収束する。実際、任意の $x\in[-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := 0,\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) := \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0), \end{cases}\quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) := 0.$$

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める。



いずれも各点収束する。実際、任意の $x\in[-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x):=0,\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x):=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0),\end{cases}\quad \lim_{n\to\infty} h_n(x)=h(x):=0.$$

($\because$ $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について証明しよう。$-1\le x\le 0$ であれば、任意の n に対して $h_n(x)=0$. $0<x\le 1$ であれば、十分大きな n に対して $\frac{1}{n}<x$ であるから $h_n(x)=0$. ゆえに $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=0$. この真似をして $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ が示せる。)

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分　続き)

一様収束するか

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n},\quad \sup_{x\in[-1,1]}|g_n(x)-g(x)|=1,\quad \sup_{x\in[-1,1]}|h_n(x)-h(x)|=n.$$

($\because$ $x\neq 0$ のとき、$|g_n(x)-g(x)|=g_n(x)$. ここで $x\to 0$ とすると 1 に収束することに注意する。)

ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束するが、$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。

項別積分可能であるか

$$\int_{-1}^{1}f_n(x)dx=\frac{1}{n}\to 0=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx,\quad \int_{-1}^{1}g_n(x)dx=\frac{1}{n}\to 0=\int_{-1}^{1}g(x)\,dx,$$
$$\int_{-1}^{1}h_n(x)dx=\frac{1}{2}\not\to 0=\int_{-1}^{1}h(x)\,dx.$$

ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は項別積分可能であるが、$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は項別積分可能でない。

極限は連続か　$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数 f, h は連続であるが、$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数 g は連続ではない。

3.3.2 例

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分　続き)

表にまとめると

	収束の種類	項別積分可能か	極限関数は連続か
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	一様収束	○	○
$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	各点収束のみ	×	○
$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	各点収束のみ	○	×

実は、一様収束していれば、項別積分可能であり、かつ極限関数の連続性も成り立つ (後で証明する)。

各点収束だけでは、項別積分可能性や極限関数の連続性は成り立たない (上の例が反例になっている)。

参考文献

[1] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、
https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843
でアクセスできる． この eBook まともな目次を付けてほしい.