複素関数・同演習 第 10 回

～冪級数 (2) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 10 月 18 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 念のため: 明日 10 月 19 日 2 限の「複素関数演習」は休講です。
- 宿題 4 の解説をします。(宿題のフィードバックが遅れていてすみません⋯) 時間がなくて出来ませんでした。すみません、来週に回します。
- 宿題 5 を出します (〆切は 10 月 25 日 13:30)。提出先の準備が遅れたので、10 月 26 日 10:50 に変更します。
- 任意の冪級数に対して、収束半径・収束円が存在することを示し、(係数) から収束半径を求める方法をいくつか紹介します。
(具体的な係数が分からなくても、収束半径が分かる場合があり、それが重要と後で分かる。)

補題 10.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、$|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

定理 10.2 (優級数の定理)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$　(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sum |a_n|$ は収束する)。

証明に使ったことは次の 3 つ。

- (a) $\mathbb{R}^{\ell}$ 内の任意の点列について、収束列である $\Leftrightarrow$ Cauchy 列である。
- (b) $r \in \mathbb{C}$ とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ が収束する $\Leftrightarrow |r| < 1$. そのとき $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \dfrac{1}{1-r}$.
- (c) 級数が絶対収束するならば収束する ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 収束 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 収束)。

3.2.1 収束円の存在

上の (c) 「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、証明してみよう。

定理 10.3 (級数が絶対収束するならば収束する)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

証明 $\displaystyle s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n}|a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして) $|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \le S_m - S_n = |S_n - S_m|$. ゆえに一般に $|s_n - s_m| \le |S_n - S_m|$ が成り立つ。ゆえに

$$\sum |a_n| \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{s_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ が収束}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束すると仮定しているので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。 □

3.2.1 収束円の存在

補題 10.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_0 で収束するならば、z_1 でも収束する。

収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_1 で発散するならば、z_0 でも発散する。

定理の形にしておく。

系 10.4 (ある点で発散すれば、より中心から遠い任意の点で発散する)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_1$ で発散するならば、$|z - c| > |z_1 - c|$ を満たす任意の z に対して発散する。

以上の準備のもと、収束円の存在定理を証明する。

定理 10.5 (収束半径・収束円の存在)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列とする。このとき冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、次のうちどれか 1 つ (だけ) が成立する。

1. (i) 任意の $z \neq c$ に対して発散する。
   (注: $z = c$ ではつねに収束する。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$.)
2. (ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。
3. (iii) ある $\rho \in (0, +\infty)$ が存在して、$|z-c| < \rho$ ならば収束し、$|z-c| > \rho$ ならば発散する。

3.2.1 収束円の存在

証明のあらすじ (i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する z_1 $(\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \le |z_0 - c|$.
もしも等号が成り立つならば、$\rho := |z_1 - c|$ $(= |z_0 - c|)$ とおけば良い。

以下では、$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ と仮定する。図を描いて、2 色のペンを持ち、「z_1 よりも c に近いところでは収束」、「z_0 よりも c から遠いところでは発散」。ここから二分法を始める。簡単なのだが、文章だけで説明するとかえって面倒な (一応、講義ノート [1] には書いておいたが、読みにくい) ので省略する。

3.2.1 収束円の存在

定義 10.6 (収束半径, 収束円)

上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho := 0$, (ii) のとき $\rho = +\infty$ とおき、ρ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束半径** (the radius of convergence) という。また

$$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束円** (the circle of convergence) という。
($\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ であることに注意)

この定義から

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ の収束半径が } \rho \Leftrightarrow (|z-c| < \rho \text{ ならば収束かつ } |z-c| > \rho \text{ ならば発散})$$

何かある数が収束半径であることを示すために、このことはよく使われる。

3.2.1 収束円の存在

注意 10.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある z でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

例 10.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ $(n\geq 0)$ の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k=\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z\neq 1)\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) & (z=1)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-z} & (|z|<1)\\ \text{発散} & (|z|\geq 1).\end{cases}$$

これから、$|z|<1$ ならば収束、$|z|>1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(0;1)$. この結果は、実は非常に非常に重要である。冪級数は等比級数に似ていて、その収束・発散は等比級数と比較して証明されることが多いから。

3.2.1 収束円の存在　補足 $\lim_{n\to\infty} r^n$

$r \in \mathbb{C}$ に対して、$\lim_{n\to\infty} r^n$ を調べておく。

$|r| < 1$ ならば

$$|r^n| = |r|^n \to 0 \quad (n \in \infty).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

一方、$|r| > 1$ ならば

$$|r^n| = |r|^n \to +\infty \quad (n \in \infty).$$

ゆえに $\{r^n\}$ は収束しない (「収束列は有界」に反する)。

以下 $|r| = 1$ とする。極形式 $r = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ を用いて考える。$\theta = 0$ の場合は $r = 1$ であるから、$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. $0 < \theta < 2\pi$ の場合は、$r^n = r^{in\theta}$ は単位円周を (一定の角度で) 周りつづけて止まらないので、収束しない。

…というようなことを授業の動画で話したが、最後の部分は次のようにするのが、論理的にはすっきりしているかも。

$|r| = 1$, $r \ne 1$ とする。もしも $\{r^n\}$ が収束するならば $r^n - r^{n+1} \to 0$ のはずであるが、

$$\left| r^n - r^{n+1} \right| = |r^n(1-r)| = |r|^n |1-r| = 1^n |1-r| = |1-r| > 0.$$

この値は n によらない正の定数であるから矛盾する。ゆえに収束しない。

2022/10/18 の講義では、時間の関係で、2 収束半径の求め方の考え方、2 Cauchy-Hadamard の公式、3 の一部 (ratio test の証明) は、後回しにする。

3.2.2 収束半径の求め方の考え方

冪級数の収束について、次のように考えることを勧める。

冪級数は等比級数に近いので、等比級数と比べて収束半径を求める

$a_n(z-c)^n \sim r^n$ とみなす。$|r|$ に相当するものがどのようにして求められるか？

(a) 比を取る ($\left|r^{n+1}\right| / |r^n| = |r|$)。

$$\frac{\left|a_{n+1}(z-c)^{n+1}\right|}{|a_n(z-c)^n|} = |z-c|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である (d'Alembert, ratio test)。

(b) n 乗根を取る ($\sqrt[n]{|r|^n} = |r|$)。

$$\sqrt[n]{|a_n(z-c)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z-c|$$

であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z-c|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である。実は lim を lim sup とすることが出来て、究極の答えになる (Cauchy-Hadamard の公式)。

3.2.2 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので推奨しないが、紹介はしておく。

定理 10.9 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1}$$

ここで lim sup は上極限を表す。

- 任意の $\{a_n\}$ に対して、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、lim sup を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨することにする。

3.2.2 Cauchy-Hadamard の公式

一応 lim sup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ がすぐ求められるかもしれない。(例えば $\limsup_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]=1$.)

上極限の定義

$\{a_n\}$ を実数列, $\lambda\in\mathbb{R}$ とする。$\limsup_{n\to\infty} a_n=\lambda$ とは、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\geq N)\ a_n<\lambda+\varepsilon.$
   これは十分大きい任意の n に対して $a_n<\lambda+\varepsilon$ が成り立つ、ということ。
2. $(\forall\varepsilon>0)\ (\forall N\in\mathbb{N})\ (\exists n\in\mathbb{N}\colon\ n\geq N)\ a_n>\lambda-\varepsilon.$
   これは $a_n>\lambda-\varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということ。

- $\limsup_{n\to\infty} a_n=+\infty$ とは、任意の $U\in\mathbb{R}$ に対して、$a_n>U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。
- $\limsup_{n\to\infty} a_n=-\infty$ とは、$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ を満たす、ということ。

上極限について、詳しいことが知りたければ、例えば杉浦 [2] V.1 を見よ。

3.2.2 Cauchy-Hadamard の公式

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 10.10 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版)

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明.

「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ が確定すれば $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$」(これは簡単に示せる) が成り立つから。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに次のように約束しておく。

$$\frac{1}{0}=+\infty,\qquad \frac{1}{+\infty}=0.$$

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 10.11 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho:=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z|<\rho$ を満たすとする。$|z|<R<\rho$ となる R をとる。

ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\ge N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|>R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。$m\ge 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m}z^{N+m}\right|=\left|a_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}z^Nz^m\right|\le\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると任意の $n\ge N$ に対して

$$|a_nz^n|\le\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

(次のスライドに続く)

3.2.3 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \leq b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{|a_N z^N|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \geq |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、$a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、ρ は収束半径である。 □

3.2.4 例

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 10.12 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.
これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$.

3.2.4 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 10.13 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\dfrac{z-c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$収束 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-c_0}{R}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-c_0| < R.$$

ゆえに ($|z-c_0| < R$ で収束、$|z-c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R. 収束円は $D(c_0; R)$. □

3.2.4 例

例 10.14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n. \qquad \text{このとき } c = 0,\ a_n = \frac{1}{n^2}\ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

例 10.15

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n. \qquad \text{このとき } c = 0,\ a_n = n^2\ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

3.2.4 例

例 10.16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$ このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$.

例 10.17

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$ このとき $c = 0$, $a_n = n!$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ であるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 0$. 収束円は $\emptyset$.

(簡単なまとめ)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c, 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、k が何であっても 1.
- $c \neq 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{|c|}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径はそれぞれ 0, $+\infty$.

3.2.4 例

例 10.18

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

このとき $c=1$, $a_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-2)^{n-1}/n\right|}{|(-2)^n/(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1;1/2)$.

例 10.19

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$ (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数}, k \text{ を } n=2k+1 \text{ で定めて})\\ 0 & (n \text{ は偶数}).\end{cases}$$

$a_n=0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。
$\zeta:=z^2$ とおくと [a]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k.$$

[a] 共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

例 10.19 (つづき)

そこで

$$(\star)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho=+\infty$.

例 10.19 (つづき　別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 10.10) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明})$$

であるから、はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. ゆえに系 10.10 の公式から、$\rho = \dfrac{1}{0} = +\infty$ である。

例 10.20 (ratio test の使えない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots \text{ の収束半径を調べよう。}$$

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

別解 上極限の定義から $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. ゆえに Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$. □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.