

複素関数・同演習 第8回

～ Cauchy-Riemann 方程式 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年10月12日(土曜)

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 複素関数の極限、連続性、正則性 (続き)
 - Cauchy-Riemann の方程式
 - 微分可能性の必要十分条件
 - 正則関数が定数となる場合
- ③ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 昨日の授業で言ったことの繰り返し: 次週 10月19日(水曜)2限の「複素関数演習」は休講となる。その補講を今週 10月15日(土曜)に 312 教室で行う。(いつものように) 当日晩に WWW サイト で授業スライドを公開する。
- §2.5 Cauchy-Riemann の方程式を解説する。ここは重要で、ゆっくりと解説する。複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性と同値であるが、微分については Cauchy-Riemann 方程式という条件がつくのは、不思議に感じられる。正則関数と調和関数との関係、等角性、逆関数定理など、色々なことに話がつながる。
- 宿題 4 を出します (必切は 10月18日(火曜) 13:30)。

2.5 Cauchy-Riemann の方程式 2.5.1 微分可能性の必要十分条件

定理 8.1 (複素関数が微分可能 \Leftrightarrow 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とする。 f が c で微分可能であるためには、 f の実部 u と虚部 v が (a, b) で(全)微分可能でかつ

$$(\star) \quad u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b)$$

を満たすことが必要十分である。

(\star) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u , 虚部 v は、 $u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

2.5.1 微分可能性の必要十分条件 例

例 8.2 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る)

正則な $f(z) = z^2$ ($z \in \mathbb{C}$), $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $f(z) = e^z$ ($z \in \mathbb{C}$) などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを確かめてみよう。

2.5.1 微分可能性の必要十分条件 例

例 8.3 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$ (以上は \mathbb{C} で定義されている), $f(z) = \operatorname{Arg} z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $f(z) = \log |z|$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) は任意の z に対して、 z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z) = \log |z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, 虚部 $v(x, y) = 0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 。

ゆえに $u_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $v_x(x, y) = 0$, $v_y(x, y) = 0$.

$x \neq 0$ であれば $u_x \neq v_y$, $y \neq 0$ であれば $u_y \neq -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

以上より、任意の点 (x, y) において、「 u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。 □

2.5.1 微分可能性の必要十分条件

定理 8.1 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) で微分可能ならば、 u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\#) \quad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b))$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$.

($\#$) を $f' = f_x = \frac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが¹ 分かりやすいかも。)

証明 f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、 $h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。
(次のスライドに続く)

¹うるさく言うと、 f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、 f_x, f_y という書き方は変である。

2.5.1 微分可能性の必要十分条件 Cauchy-Riemann 方程式の導出 (続き)

- Ⓐ $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)
 $f(c + h_x) = u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \rightarrow 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c + h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{(u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \left(\frac{u(a + h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a + h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) = u_x(a, b) + iv_x(a, b). \end{aligned}$$

- Ⓑ $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)
 $f(c + ih_y) = u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_y \rightarrow 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c + ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{(u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{ih_y} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_y \rightarrow 0} \left(\frac{u(a, b + h_y) - u(a, b)}{h_y} + i \frac{v(a, b + h_y) - v(a, b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)) \end{aligned}$$

以上から

$$f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} [u_y(a, b) + iv_y(a, b)] = v_y(a, b) - iu_y(a, b).$$

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad v_x(a, b) = -iu_y(a, b). \quad \square$$

2.5.1 微分可能性の必要十分条件 定理 8.1 の証明

定理 8.1 の証明

f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p + iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

$h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) とおくと

$$\begin{aligned} f(c+h) - f(c) &= u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) + i(v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b)), \\ (p+iq)h &= (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\ &= \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|} \\ &= \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|. \end{aligned}$$

2.5.1 微分可能性の必要十分条件 定理 8.1 の証明

ゆえに

f が c で微分可能

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(a + h_x, b + h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\text{かつ} \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{v(a + h_x, b + h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u$ と v は (a, b) で (全) 微分可能で

$$u_x(a, b) = p, \quad u_y(a, b) = -q, \quad v_x(a, b) = q, \quad v_y(a, b) = p$$

$\Leftrightarrow u$ と v は (a, b) で (全) 微分可能で $u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b)$. \square

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理?? (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問 $f' = 0$ ならば f は定数関数か?

答 無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「 $f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、 f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合も、同様のことをしたければ、(弧) 連結性の概念が必要になる。

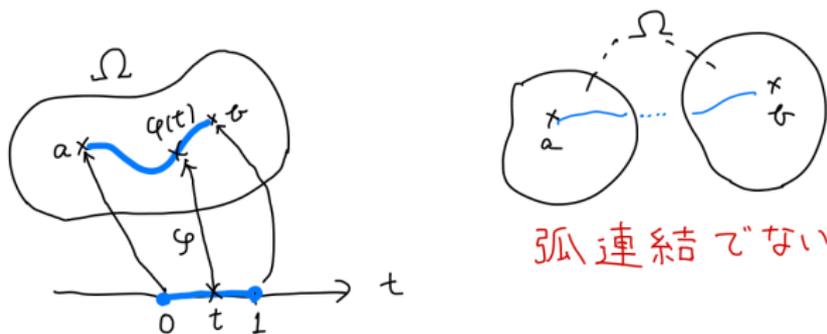
2.5.2 正則関数が定数となる場合

定義 8.4 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^l$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が **弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、 Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、 Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ で、 $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、 Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を **領域** (region) と呼ぶ。



直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、 Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを **弧連結成分** と呼ぶ。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

注意 8.5 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- \mathbb{R}^l の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

\mathbb{R} の部分集合 I について、 I が区間 $\Leftrightarrow I$ は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

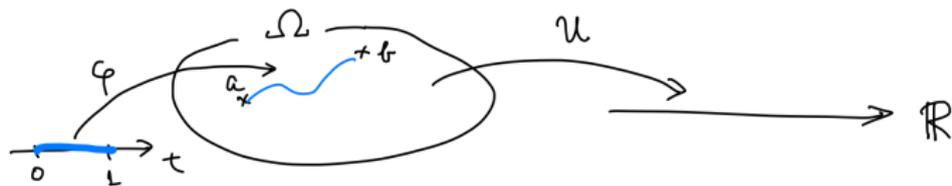
Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、 Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、 C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 8.6 (領域で導関数が0に等しい関数は定数関数である)

Ω は \mathbb{R}^n の領域 (連結な開集合)、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、 $u' = 0$ を満たすならば、 u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明 任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ が存在して、 φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.

このとき、 $F(t) := u(\varphi(t))$ ($t \in [0, 1]$) とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)

以上より u は Ω 全体で定数関数である。 □

10月12日の授業はここで時間切れとなりました。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf> (2014～).