複素関数・同演習 第3回

～平方根 (続き), 複素平面, 絶対値, 共役複素数 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/

2022 年 9 月 27 日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. 複素数の定義と基本的な性質
   - 平方根 (続き)
     - 実数の平方根と $\sqrt{\ \ }$ (念のため再収録)
     - 関数論における $\sqrt{\ \ }$
     - 2 次方程式
   - 共役複素数
     - 実係数多項式の根
   - 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ... との比較)
     - 余談 Hamilton の四元数
   - 複素 (数) 平面, Gauss 平面
   - 絶対値
3. 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 宿題 1 の解答を説明します。
  (1) は、主に高校の数学 III の内容で、単なる計算ですね。
  $$z_1+z_2=6-2i,\quad z_1-z_2=2-4i,\quad z_1z_2=11-2i,\quad z_1/z_2=1-2i,$$
  $$|z_1|=5,\quad \operatorname{Re} z_1=4,\quad \operatorname{Im} z_1=-3,\quad \overline{z_1}=4+3i.$$
  (2) については途中は省略して、結果は $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$.
- 今日は、講義ノート [1] の §1.3〜1.7 の内容を講義します。
- 明日 9 月 28 日に宿題 2 を出します (Oh-o! Meiji の「複素関数演習」のレポートを見て下さい。〆切 10 月 4 日 13:30)。
- (重要) 複素関数、複素関数演習は両方履修するように勧めています。もしも複素関数のみを履修する人は、宿題の提出は次のようにして下さい。水曜日の段階で

  「授業 WWW サイト」

  にアクセスして宿題の課題文を読みレポートを作成し、翌週の火曜 13:30 までに Meiji メールを使って、`katurada` あっと `meiji` ドット `ac` どっと `jp` までに送って下さい。

前回、複素数の平方根を定義し (拡張し)、定理 (存在、$\sqrt{\text{正の数}}$ で表せる) を示した。
$\sqrt{\text{複素数}}$ を導入したい。
中学校で次のことを学んだ。

前回、複素数の平方根を定義し (拡張し)、定理 (存在、$\sqrt{\text{正の数}}$ で表せる) を示した。
$\sqrt{\text{複素数}}$ を導入したい。
中学校で次のことを学んだ。

1. 0 の平方根は 0 のみ。
2. $c > 0$ の平方根は 2 つ存在し、一方が正、もう一方はその -1 倍。
3. $c < 0$ の平方根は $\mathbb{R}$ の範囲には存在しない。

((2) の証明は、$f(x) = x^2 - c$ に中間値の定理を適用すれば良い。)

定義　$c \geq 0$ に対して、非負の平方根を $\sqrt{c}$ と表す。
系　$c \geq 0$ の平方根は $\pm\sqrt{c}$.
問 1　$c_1, c_2 \geq 0$ のとき $\sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{c_1}\sqrt{c_2}$ を示せ。

注意　高校では、$c < 0$ のとき $\sqrt{c} = \sqrt{-c}\,i$ としたが、この講義では採用しない。

中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。

問 2　負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}\ i$ と定義した場合、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ とは限らないことを示せ。
(解答はこのスライド PDF の最後に置いておく。)

1.5.4 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

複素数 c に対して $\sqrt{c}$ という記号を導入する。

$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

1.5.4 関数論における $\sqrt{}$ (事故多発地点)

複素数 c に対して $\sqrt{c}$ という記号を導入する。

$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

実際、色々な場合がある。

- (a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
- (b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない, ルールを書かない)。
- (c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

1.5.4 関数論における $\sqrt{}$ (事故多発地点)

複素数 c に対して $\sqrt{c}$ という記号を導入する。

$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

実際、色々な場合がある。

- (a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
- (b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない, ルールを書かない)。
- (c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

ただし、$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は (これまで通り) c の非負の平方根を表すことにする。

(本当は ${}^{\text{複素}}\!\!\sqrt{}$ とか、記号を変えて区別した方が良いのかもしれないけれど、そういう面倒なことはしないのが相場になっています。)

1.5.4 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

複素数 c に対して $\sqrt{c}$ という記号を導入する。

$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

実際、色々な場合がある。

(a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
(b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない, ルールを書かない)。
(c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

ただし、$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は (これまで通り) c の非負の平方根を表すことにする。

(本当は ${}^{\text{複素}}\!\sqrt{\quad}$ とか、記号を変えて区別した方が良いのかもしれないけれど、そういう面倒なことはしないのが相場になっています。)

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}\,i$ かもしれないし、$-\sqrt{3}\,i$ かもしれないし、$\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

1.5.4 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

複素数 c に対して $\sqrt{c}$ という記号を導入する。

$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

実際、色々な場合がある。

(a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
(b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない, ルールを書かない)。
(c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

ただし、$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は (これまで通り) c の非負の平方根を表すことにする。

(本当は ${}_{\text{複素}}\sqrt{\quad}$ とか、記号を変えて区別した方が良いのかもしれないけれど、そういう面倒なことはしないのが相場になっています。)

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}\,i$ かもしれないし、$-\sqrt{3}\,i$ かもしれないし、$\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

次の 2 次方程式の解の公式では、$\sqrt{\quad}$ は $\pm\sqrt{\quad}$ という形で現れるので、(1)〜(3) のどの流儀を採用しても同じ内容を表すことになる。

1.5.5 2次方程式

系 3.1 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

(1) $$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

1.5.5 2 次方程式

系 3.1 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

(1)
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

証明 (実係数 2 次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

1.5.5 2次方程式

系 3.1 (複素係数2次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

(1)
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら2つ, $D = 0$ ならば1つ (重根)。

証明 (実係数2次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$b^2 - 4ac$ の平方根のうちの任意の1つを $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表すとき、$\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $\left(\because \left(\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

系 3.1 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

(1)
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

証明 (実係数 2 次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$b^2 - 4ac$ の平方根のうちの任意の 1 つを $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表すとき、$\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $\left(\because \left(\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

ゆえに $z + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. 移項して z が求まる。 □

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(2)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(3)
$$\overline{z} := x - yi$$

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(2)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(3)
$$\overline{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

(4)
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(2)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(3)
$$\overline{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

(4)
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

(5)
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(2)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(3)
$$\overline{z} := x - yi$$
一般に以下が成立する

(4)
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

(5)
$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$
(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

(6)
$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i} \text{ すなわち } \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$
ゆえに「x, y で表せるものは、$z, \overline{z}$ で表せる」。

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(2)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(3)
$$\overline{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

(4)
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

(5)
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

(6)
$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \text{ すなわち } \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

ゆえに「x, y で表せるものは、$z, \overline{z}$ で表せる」。

(7)
$$z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f(\overline{c})=0$.

証明

$$\overline{f(z)}=\overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., $a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$\begin{aligned}\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\ &= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n}\end{aligned}$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., $a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n}
\end{aligned}
$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n} \\
&= a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n
\end{aligned}
$$

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, a_0, a_1, $\ldots$, $a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n}\\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n}\\
&= a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n\\
&= f\left(\overline{z}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つので

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., $a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n} \\
&= a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n \\
&= f\left(\overline{z}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
f(c)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{f(c)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad f\left(\overline{c}\right)=0. \quad \square
$$

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ... との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, … との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

その代わり (？) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ $\because$ **代数学の基本定理**が成立) 。

$\mathbb{C}$ は順序体ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: 代数的閉体 (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ $\because$ 代数学の基本定理が成立) 。

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ について。

- $\mathbb{Q}$ は可換体かつ順序体だが完備ではない。
- $\mathbb{R}$ は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。
  注: 完備性は解析学にとっては非常に有効
- $\mathbb{C}$ は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, . . . との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ $\because$ **代数学の基本定理**が成立) 。

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ について。

- $\mathbb{Q}$ は可換体かつ順序体だが完備ではない。
- $\mathbb{R}$ は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。
  注: 完備性は解析学にとっては非常に有効
- $\mathbb{C}$ は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

(参考) Hamilton の四元数体 $\mathbb{H}$ は、体ではあるが可換性は成り立たない。順序体でもない。

1.3.1 余談 Hamilton の四元数

(このスライドの内容は「時間があれば話そう」と思っていましたが、2022 年度の講義では省略しました。)

Hamilton (1805–1865) は三元数を探して成功しなかったが、**四元数**(しげんすう) (quaternion) を発見した。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(これから $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ が導かれる。)

$\mathbb{H}$ は実は非可換体である。**四元数体** (the skew field of Hamilton quaternions) と呼ばれる。

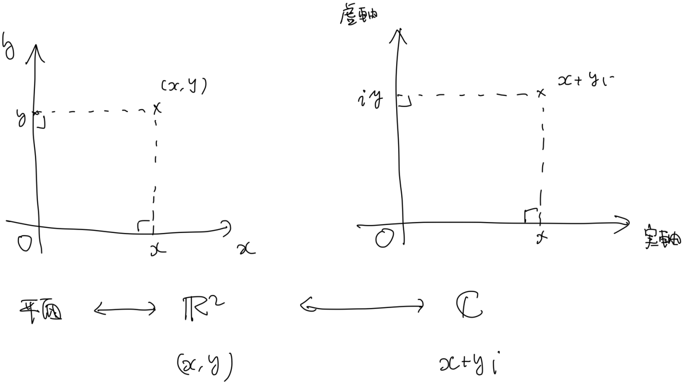
多項式の割り算がこれまでのようには出来ず、因数定理も成り立たない。$z^2 = -1$ の解が $\pm i$ 以外にも存在する。

四元数については、例えば堀 [2], 今野 [3] を見よ。

最近は結構応用されている (今野 [3])。

1.4 複素 (数) 平面, Gauss 平面

2 つ並べて図を描く。
$\mathbb{C}$ は拡張 $\mathbb{R}^2$ だから、本質的には座標平面の話と同じ。「実軸」,「虚軸」



1.5 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(8) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.5 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

$$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8}$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

1.5 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(8) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

(9) $$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad \text{(図を描いてみること)},$$

1.5 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(8) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

(9) $$|-z| = |z|, \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{(図を描いてみること)},$$

さらに

(10) $$z\bar{z} = |z|^2$$

が成り立つ。

1.5 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(8) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

(9) $$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad \text{(図を描いてみること)},$$

さらに

(10) $$z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

1.5 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(8) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

(9) $$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみること}),$$

さらに

(10) $$z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

ゆえに $z \neq 0$ ならば

(11) $$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

1.5 絶対値

定理 3.3 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ (三角不等式)
3. $|zw| = |z|\,|w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

1.5 絶対値

定理 3.3 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ (三角不等式)
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。

1.5 絶対値

定理 3.3 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z+w| \leq |z| + |w| \quad$ (三角不等式)
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。

1.5 絶対値

定理 3.3 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ (三角不等式)
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。
3. $z = a + bi$, $w = c + di$ とおいて、左辺&右辺を計算して比較するか、

定理 3.3 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ (三角不等式)
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。
3. $z = a + bi$, $w = c + di$ とおいて、左辺&右辺を計算して比較するか、$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z|\,|w|)^2$ の $\sqrt{\ }$ を取る。

1.5 絶対値

定理 3.3 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ 　(三角不等式)
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。
3. $z = a + bi$, $w = c + di$ とおいて、左辺&右辺を計算して比較するか、
$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z|\,|w|)^2$ の $\sqrt{\ }$ を取る。
4. $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$ であるから $|z| - |w| \leq |z - w|$.
z と w を入れ替えて $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$.
まとめると $\big||z| - |w|\big| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|$.
(任意の実数 x について、$|x| = \max\{x, -x\}$ であることを用いた。) $\square$

平方根　問の解答

問

1. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ であることを示せ。
2. 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}\, i$ と定義した場合、
   $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ とは限らないことを示せ。

解答

1. $\left(\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}\right)^2 = \left(\sqrt{c_1}\right)^2\left(\sqrt{c_2}\right)^2 = c_1 c_2$. すなわち $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}$ は、$c_1 c_2$ の (1 つの) 平方根である。
   また $\sqrt{c_1} \geq 0$, $\sqrt{c_2} \geq 0$ であるから、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \geq 0$.
   ゆえに (非負の平方根であるから) $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$.
2. $c_1 = -1$, $c_2 = -1$ とするとき
   $$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = i \cdot i = -1, \qquad \sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$
   であるから $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1 c_2}$. □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf (2014〜).

[2] 堀源一郎：ハミルトンと四元数 人・数の体系・応用, 海鳴社 (2007).

[3] 今野紀雄：四元数, 森北出版 (2016/12/1).