2021年度複素関数・同演習期末レポート課題

桂田 祐史

2022年1月25日 12:00公開, 26日 10時23分 訂正版

問題は2ページ目以降にある。

- 〆切は1月27日(木) 12:00、Oh-o! Meiji で提出すること。なるべく1月27日 9:00 までに提出することを勧める(ギリギリになるとトラブルが生じがち)。それ以降になる場合は一度連絡すること。〆切後の提出は原則として認めない。
- 提出〆切までは、問題について、私(桂田)以外の人に質問・相談しないこと。酷似した答案が見つかった場合は、呼び出して事情を尋ねる(Meiji Mail はチェックするように)。
- ネットワーク、サーバーの障害等に遭遇したら、連絡すること。〆切の延長などの措置を取る可能性がある。
- 疑問点が生じたら、なるべく早くメール(katurada あっとまーく meiji どっと ac ドット jp)で質問すること。
- 質問に対する回答のうち主なものは、授業WWWサイト http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/ で公開する。重要なものがあった場合(問題訂正など)、そのことを Oh-o! Meiji を使って通知する。
- 1/26(水曜) 9:30〜10:30 (本来の定期試験の日時) に Zoom でも質問を受け付ける(参加方法は、学期中の Zoom オフィスアワーと同じ、シラバスの補足に書いてある)。
- レポートはA4サイズのPDFで提出すること。最初のページの一番上に学年・組・番号(学生番号ではない1〜2桁の数)・氏名を記入すること。ページ番号をつけること。数式が正しく鮮明に表記される限り、PDFの作成方法は問わない(手書き、TEX, Word, …何でも良い)。なるべく単一のPDFで提出することが望ましいが、サイズが30MBを超えた場合は複数のファイルに分割して“追加提出”すること。
- 大問の解答はひとまとめにすること。(例えば **2** の(1)と(2)は離れた場所に書いたりせず、1箇所にまとめる。)
- 講義資料、参考書、ネットの情報など、何を参考にしても構わない。
- 計算の途中経過・根拠も適当にレポートに書くこと(要点が書いてあれば、最終結果が間違っていても中間点をつける場合がある)。結果の確認に Mathematica 等のソフトウェアを使っても良い。
- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと。
- 特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良い。授業中に説明していない(複素関数についての)定理を用いるときは、証明してから用いること。

1〜5 は必修問題である。**6A**, **6B** のいずれか一方を選択し、合計 6 問の解答をレポートせよ。記号は講義で用いたものに準じる。結果だけでなく途中経過・根拠も記すこと (当たり前だが念のため)。提出〆切までは、問題について、私 (桂田) 以外の人に質問・相談しないこと。

1. $z=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$ に対し、z^2 を計算して、z の極形式, z^{12}, $\operatorname{Log} z$ を求めよ (極形式以外は、実部と虚部がすぐ分かる形で表すこと)。

2. (1) 正則関数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ の実部 u, 虚部 v について、$v(x,y)=\cos y\cosh x$ が成り立つとき、f を求めよ。 (2) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ を $f(x+yi)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ で定める。f の複素関数としての微分可能性について論ぜよ。

3. (1) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)^4}{2^n}(z-5)^{6n+7}$ の収束円を求めよ。根拠もきちんと書くこと。

(2) 次の条件 (a), (b) を同時に満たす冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ の例をあげよ。

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ の収束半径はともに 1 (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ の収束半径は 2.

4. $f(z)=\dfrac{5z^2-16z-7}{z^4-6z^3+10z^2-6z+9}$ で定まる関数 f について、以下の問に答えよ。

注 (当然のことなので書きたくないが) 級数の収束する範囲 (収束円等) を記すこと。

(1) $f(z)$ を複素数の範囲で部分分数分解せよ。

(2) f を 0 の周りで Laurent 展開せよ。

(3) f を 3 の周りで Laurent 展開せよ。

(4) 正数 R を大きくとると、円環領域 $A(3;R,+\infty)$ で f は Laurent 展開できる。このような R の最小値を求めよ。

5. 次の定積分を留数を用いて求めよ。a は正の数とする。

(1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^4+1)}dx$ (2) $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$

6A.

(1) a を任意の実数とする。z についての方程式 $\exp\dfrac{1}{z}=a$ の解をすべて求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{z_n}=0$ を満たす数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を 1 つ求めよ (無数に存在するがどれか 1 つで良い)。

6B. 次の定理 (授業で証明抜きに紹介した) を証明せよ: $P(z)$, $Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+1$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ $P(x)\neq 0$, $a<0$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iax}\,dx=-2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c<0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right).$$