2014年度 複素関数, 複素関数同演習 期末試験問題

2015年1月30日 (金) 9:00〜11:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2枚) のみ提出

1. $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ とするとき、$\dfrac{1}{z}$, z^2, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$, $\arg z$, z の極形式, z^{10} を求めよ (極形式以外は $a+bi$ あるいは a あるいは bi $(a,b\in\mathbb{R})$, いずれかの形に表せ)。結果のみで良い。

2. 次の各用語を説明せよ (定義を述べ、実例をあげよ)。
(1) 正則関数　(2) 孤立特異点　(3) 孤立特異点のまわりの Laurent 展開と留数

3. (1) 方程式 $\sin z=2$ を解け。(2) $f(z)=\sin z$ の実部・虚部を求め、それらが Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを実際に偏微分することで確認せよ。

4. (1) 冪級数の収束半径と収束円の定義を述べよ。(2) $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+5}$ に対して、以下の問に答えよ。(a) f の 0 の周りの Taylor 展開 (冪級数展開) と、その収束半径を求めよ。(b) f の i の周りの Taylor 展開の収束半径を求めよ。

5. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-4)}$ について、以下のものを求めよ。(1) 0 のまわりの Laurent 展開とその主部と留数 $\operatorname{Res}(f;0)$　(2) 4 のまわりの Laurent 展開とその主部と留数 $\operatorname{Res}(f;4)$　(3) $A(0;4,\infty)$ における Laurent 展開　ただし $A(c;R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C} \mid R_1<|z-c|<R_2\}$.

6. 次の定積分を求めよ。何か公式 (定理) を用いる場合は、その公式を説明すること。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\sin\theta)^2}$

7. 以下の命題から1つ以上選んで証明せよ。

(a) f が正則関数ならば、f の実部と虚部をそれぞれ u, v とするとき、u, v は Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(b) f が領域で定義された正則関数で、$|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

(c) c が f の k 位の極であるとき、$\operatorname{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.　(適当な正則関数と積分路を選び、複素線積分の収束などを示すことで証明せよ。)

(e) 授業で説明した命題のうち、きちんと (仮定の条件をもらさずに) 書けるものを自由に1つ選んで良い。

(2015 年 2 月 5 日版, 色々省略しているけれど、段々書き足す。)

- 正則関数の定義が「微分可能な複素関数」であることは頭に叩き込む。

- 冪級数とは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数であり、任意の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、

  「$|z-c|<\rho$ で収束、$|z-c|>\rho$ で発散」を満たす ρ が一意的に存在する

  ので、その ρ を収束半径、$\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<\rho\}$ を収束円と呼ぶ。
  注 円の内部であるから、円盤 (または円板) と呼ぶのがふさわしそうだが、収束円 (英語では the circle of convergence) と呼ぶ習慣である。

- 昔から学生に多い間違い: 収束半径とは、$\rho=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ で求まる ρ のことである。
  そもそもこの lim が存在しない場合がとても多い。lim が存在するのは特殊な場合に過ぎない。一方で、上に書いたこと (|$z-c|<\rho$ で収束、$|z-c|>\rho$ で発散」を満たす ρ が一意的に存在する) は常に成り立つので、それを使って定義しているわけである。

  d'Alembert の公式は使用上の注意を守ってお使い下さい
  (収束半径の定義には使えない)

- 何故か間違えたり忘れる人が多いのが、虚数部分と絶対値

$$\mathrm{Im}\,(1+2i)=2 \qquad (\mathrm{Im}\,(1+2i)=2i \text{ ではない})$$

- 間違えずに使えて、求められたら証明も出来るべき公式 2 つ

  - 複素数 c と自然数 n に対して、方程式 $z^n=c$ の解は、c の極形式を $\rho e^{i\varphi}$ として、$z=\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ (c の極形式は無限個あるが、どれでも 1 個選べば良い).
  - 複素数 z $(\neq 0)$ に対して、方程式 $e^w=z$ の解は、z の極形式を $re^{i\theta}$ として、$w=\log r+i(\theta+2n\pi)$ $(n\in\mathbb{Z})$ (z の極形式は無限個あるが、どれでも 1 個選べば良い).
    これから、複素関数としての対数関数の定義 $\log z=\log r+i(\theta+2n\pi)$ $(n\in\mathbb{Z})$
    注意 複素関数としての対数関数は無限多価関数で、写像ではない！
    注意 複素関数としての対数関数は実関数の対数関数の拡張ではない！(実関数の値を含んでいるが、それ以外の値も含んでいて、取り扱い注意が必要である。異なる記号で表した方が良いくらい。指数関数とは事情が異なる。)

- いわゆる「初等関数」は、指数関数とその逆関数である対数関数を使って表される。

  (i) Euler の公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$ と、それから導かれる $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ は、θ が複素数でも (つまり指数関数、cos, sin を複素関数に拡張しても) 成り立つ。特に

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

(ii) $\alpha \neq 0$ に対して、$z^\alpha := e^{z \log \alpha}$
注意　$w = \log z$ が多価関数だから、大抵の場合は $w = z^\alpha$ も多価関数だが、$\alpha \in \mathbb{Z}$ ならば 1 価、$\alpha \in \mathbf{Q}$ ならば $\alpha = \frac{n}{m}$ ($m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $(m,n) = 1$ として n 価である。

(解説)

1. $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ であるから

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}+i} = \frac{2(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{2(\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{2},$$
$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{3}i+i^2}{4} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}.$$
$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1.$$
$$\overline{z} = \overline{\frac{\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$
$$\arg z = \frac{\pi}{6}.$$
$$z = e^{i\pi/6}.$$

$z = e^{i\pi/6}$ であるから、

$$z^{10} = e^{i10\pi/6} = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}. \blacksquare$$

偏角を間違える人が多い。$\pi/3$ としてしまうとか。高校数学を忘れている？

2.

(1) 複素関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則であるとは、$\forall c \in \Omega$ で微分出来ること、すなわち極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することをいう。

(2) c が f の孤立特異点とは、ある正数 R が存在して $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < R\}$ で f が (定義されていて) 正則で、f が c では微分可能でないことをいう。

(3) c が f の孤立特異点であるとき、ある正数 R とある数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$(\sharp)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R)$$

が成り立つ。($\sharp$) を f の c のまわりの Laurent 展開と呼び、a_{-1} を f の c における留数と呼ぶ。

- 大雑把に言って、正則とは微分可能な複素関数ということ。正確に言うと、「定義域である開集合の上で」微分可能ということ。それが分かっていない人には単位出したくない…
- Laurent 級数の形が書けないのは困った。
- 留数は a_{-n} なんてのもいた。

3.

(1) (宿題 No. 6 (5) そのもの) $w=e^{iz}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sin z=2 \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2 \quad\Leftrightarrow\quad w-\frac{1}{w}=4i \quad\Leftrightarrow\quad w^2-4iw-1=0\\
&\Leftrightarrow\quad w=2i\pm\sqrt{(2i)^2+1}=2i\pm\sqrt{3}i=\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\\
&\Leftrightarrow\quad iz=\log\left[\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right]=\log\left(2\pm\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\quad (n\in\mathbb{Z})\\
&\Leftrightarrow\quad z=-i\log\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{2}+2n\pi\quad (n\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

(**注:** 実は $\log\left(2-\sqrt{3}\right)=-\log\left(2+\sqrt{3}\right)$ なので $z=\pm i\log\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{2}+2n\pi$ と書いても良いし、$z=i\log\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{2}+2n\pi$ と書いても良い。)

(2) 宿題 No. 3 (1-c) で $\cos z$ の実部・虚部を求める問題があり、その類題である。

$$\begin{aligned}
\sin z&=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\left(\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos x+i\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin x\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin x+i\left(e^{y}-e^{-y}\right)\cos x\right)\\
&=\cosh y\sin x+i\sinh y\cos x.
\end{aligned}$$

(Mathematica で `ComplexExpand[Sin[x+I y]]` とすると検算できる。) $u(x,y)=\cosh y\sin x$, $v(x,y)=\sinh y\cos x$ であるから、

$$u_x=\cos x\cosh y,\quad u_y=\sinh y\sin x,\quad v_x=-\sin x\sinh y,\quad v_y=\cosh y\cos x.$$

確かに $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つ。 $\blacksquare$

宿題の時はそれなりに解けていた (1) がぼろぼろ。

4.

(1) 任意の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$|z-c|<\rho$ ならば収束、$|z-c|>\rho$ ならば発散という条件を満たす $\rho \in [0,\infty)\cup\{\infty\}$ がただ 1 つ存在する。その ρ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径と呼ぶ。このとき $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|<\rho\}$ を収束円と呼ぶ。

(2) (a) 等比級数の和の公式から

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+5}=\frac{2z}{5\left(1-\dfrac{-z^2}{5}\right)}=\frac{2z}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{5}\right)^n=\frac{2z}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{5^{n+1}}z^{2n+1}.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z^2}{5}\right|<1 \Leftrightarrow |z|<\sqrt{5}$ であるから、収束半径は $\sqrt{5}$.

(別解)

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{z+i\sqrt{5}}+\frac{1}{z-i\sqrt{5}}=\frac{1}{i\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+z/i\sqrt{5}}-\frac{1}{1-z/i\sqrt{5}}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{iz}{\sqrt{5}}\right)^n-\left(\frac{iz}{\sqrt{5}}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}\left((-1)^n-1\right)}{5^{(n+1)/2}}z^n. \end{aligned}$$

ここから d'Alembert をしても難しい。結局は、n が偶数のときと奇数のときで場合分けすることになるだろう。そうすると上の式に戻る。

(b) f は分母の零点である $\pm\sqrt{5}i$ を除いた $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{\sqrt{5}i,-\sqrt{5}i\}$ で正則である。$i\in\Omega$ であるから、f は i のまわりで冪級数展開できるが、その収束半径は、中心 i とこれら特異点との距離で、$\sqrt{5}-1$. ■

- 収束半径の定義が書けない人が多い。何となく予想したとおり、d'Alembert の公式を書いている人が結構いた。喩え話をすると、簡単な方程式は解けるけれど、方程式の解とは何か分かっていないような、そんな感じ。(計算問題の解を出すだけならば、Mathematica の方が優秀だよなあ。)
- (2) で収束半径を 5 と書く人が出ると予想していたけれど、予想していたよりも大勢いた。
- d'Alembert の公式なんて教えない方が良いのかもしれない、と思わせるような、惨憺たる結果。

5. 宿題 No. 11 そのものです。

$$f(z)=\frac{1}{z(z-4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z}\right).$$

(1) 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-4}=-\frac{1}{4(1-z/4)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}\quad(|z|<4).$$

であるから、

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}-\frac{1}{z}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}\quad(0<|z|<4).$$

この Laurent 展開の主部は $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z}$ である。0 における留数は $1/z$ の係数であるから

$$\mathrm{Res}(f;0)=-\frac{1}{4}.$$

(2) 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-4)+4}=\frac{1}{4\,(1+(z-4)/4)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-4}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-4)^n\quad(|z-4|<4)$$

であるから、

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-4)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}(z-4)^n+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}\quad(0<|z-4|<4).$$

この Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-4}$ である。4 における留数は $1/(z-4)$ の係数であるから

$$\mathrm{Res}(f;4)=\frac{1}{4}.$$

(3) $|z|>4$ のとき $|4/z|<1$ であるから、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z(1-4/z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}\quad(4<|z|<\infty).$$

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-2}}{z^n}\quad(4<|z|<\infty).\blacksquare$$

6.

(1) 「$f(x)=\dfrac{Q(z)}{P(x)}$, $P(z)$, $Q(z)$ が多項式で $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+2$, $(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\neq 0$ が成り立つとき、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極}\\ \mathrm{Im}\,c>0}}\mathrm{Res}(f;c).$」という定理を使う。$f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$, $P(z)=z^4+1$, $Q(z)=1$ とおくと、$f(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $\deg P(x)=4\geq 0+2=\deg Q(z)+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\geq 1$ より $P(x)\neq 0$. ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極}\\ \mathrm{Im}\,c>0}}\mathrm{Res}(f;c).$$

f の極 c は P の零点で、P の零点は $z^4+1=0$ の解であるから

$$c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

このうち $\operatorname{Im} c > 0$ であるものは $\dfrac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$. c は P の 1 位の零点であるので、

$$\operatorname{Res}(f;c) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \frac{1}{4c^3} = \frac{c}{4c^4} = \frac{c}{4\cdot(-1)} = -\frac{c}{4}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(f;\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(f;\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\pi i\cdot\frac{-1}{4}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 2\pi i\cdot\frac{-1}{4}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}} = \frac{-i^2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

f は偶関数であるから

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(2) $z = e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ より $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-1/z}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$ であるから、

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\sin\theta)^2} = \int_{|z|=1}\frac{1}{\left(2+\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1}\frac{2^2i^2z^2}{(z^2+4iz-1)^2}\frac{dz}{iz} = 4i\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4iz-1)^2}dz$$

$z^2+4iz-1=0$ の解は

$$-2i\pm\sqrt{(2i)^2+1} = -2i\pm\sqrt{3}i = (-2\pm\sqrt{3})i.$$

$f(z) := \dfrac{z}{(z^2+4iz-1)^2}$ とおくと、留数定理により

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\sin\theta)^2} = 4i\cdot 2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+4iz-1)^2};c\right) = -8\pi\operatorname{Res}\left(f;(\sqrt{3}-2)i\right)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;\alpha) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left((z-\alpha)^2\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\beta)^2\cdot 1-2(z-\beta)\cdot z}{(z-\beta)^4} = \lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\beta)-2z}{(z-\beta)^3}\\ &= \lim_{z\to\alpha}\frac{-(z+\beta)}{(z-\beta)^3} = \frac{-(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^3}.\end{aligned}$$

$\alpha = \left(-2+\sqrt{3}\right)i$, $\beta = \left(-2+\sqrt{3}\right)i$ とするとき、$\alpha+\beta = -4i$, $\alpha-\beta = 2\sqrt{3}i$ であるから、

$$\mathrm{Res}(f;\alpha) = -\frac{-4i}{\left(2\sqrt{3}i\right)^3} = \frac{4i}{-8\cdot 3\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\sin\theta)^2} = -8\pi\cdot(-\frac{1}{6\sqrt{3}}) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}.\blacksquare$$

(2) で

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\sin\theta)^2} = 4i\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4iz-1)^2}dz$$

まで書いてくれれば中間点の出しようがあるのだけど (ここから後は留数計算で、それはそれでウェイトが大きいけれど、複素線積分に直すまでで、半分の点をあげても良い)。そういう式を書かずに留数計算の準備をして、結局何の主張も書いていない答案を見ると、悲しくなる。記述式の試験に慣れていないということなのかなあ。全部分からなくても、最後まで行き着かなくても、分かったことは明記する、ということで、そんなに難しいことではないのだけど。

7. (略)