複素関数練習問題 No. 5

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/

桂田 祐史

2017 年 11 月 10 日

冪級数の項別微分可能性、正則性、展開の一意性

問題 86. 収束冪級数について “係数比較” が可能なこと、つまり $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, 数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ と $\{b_n\}_{n\ge 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (|z-c| < r)$$

が成り立てば、$a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることを示せ。

Taylor 展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$ は冪級数展開であるが、冪級数展開はこの問題で見たように一通りしかないので、どういうやり方であっても冪級数の形に変形できれば、それは Taylor 展開である。つまり「Taylor 展開 = 冪級数展開」である。

問題 87. (1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\dfrac{1}{z+4}$ (b) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$ (c) $\dfrac{1}{z^2+1}$ (d) $f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f (e) $\dfrac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$

((b),(d) は微分積分を考えてみる。(e) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

問題 88. 次の冪級数の和を求めよ ($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ を用いずに表せ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ (結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ が求まる。)

問題 89. e^z, $\cos z$, $\sin z$ を冪級数で定義するとき、$(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ を確かめよ。

問題 90. $z \in \mathbb{C}$ に対して $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

問題 91. (1) $f(z) = e^z$ が $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ を満たすことを用いて、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、$f(z)f(c-z) = f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $e^a e^b = e^{a+b}$ であることを示せ。

(式変形による (2) の証明も知られているが、(1) から導ける。なお、指数関数の指数法則や三角関数の加法定理は、後で学ぶ「一致の定理」を用いる証明も有名である。)

問題 92. (e^z を冪級数で定義したとき) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ であることを示せ。

問題 93. p, q が複素数の定数であり、2 次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β を持つとする。このとき微分方程式 $\dfrac{d^2 w}{dz^2} + p\dfrac{dw}{dz} + qw = 0$ の解 $w = f(z)$ が原点のまわりで冪級数展開可能ならば、$f(z) = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{\beta z}$ (C_1, C_2 はある定数) と表せることを示せ[1]。

---

[1]実変数の範囲で微分方程式 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + p\dfrac{dy}{dx} + qy = 0$ を考えると、一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ (C_1, C_2 は任意定数) であることは常微分方程式を学んだとき、必ず教わることであるが、それは関数論の世界でも成り立つ、ということである。後で「正則ならば冪級数展開可能」という定理を学ぶと証明が完成する。

問題 94. 任意の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と、任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して、2 つの冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p} \qquad \left(= \sum_{n=p}^{\infty} a_{n-p}(z-c)^n\right)$$

の収束発散は一致する (収束する $z \in \mathbb{C}$ 全体の集合が等しい)。特に収束半径、収束円も一致する。 — 以上を証明せよ。

問題 95. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 であるとするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\rho_1 \neq \rho_2$ であれば、$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ である。

(2) $\rho_1 = \rho_2$ であれば、$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_1 以上である。収束半径が ρ_1 より大きくなる例をあげよ。

初等関数

問題 96. 以下の方程式を ($\mathbb{C}$ 内で) 解け (解を書くのは簡単なものが多いが、漏れがないことが分かるように解くこと)。
(1) $e^z = 1$　(2) $e^z = -1$　(3) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$　(4) $\sin z = 0$　(5) $\sin z = 2$

ヒント: (1),(2),(3) は複素関数の log を使っても良いし、$\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いて、実関数 e^x, $\cos y$, $\sin y$ の話に持ち込んでも良い。(後者の方が後々忘れにくいとは思うけれど、どちらでもよい。) (4) と (5) は e^{iz} の話に持ち込む。

問題 97. $\cos z$, $\sin z$ の加法定理を証明せよ。

問題 98. (1) $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i \sin z$, $\tanh(iz) = i \tan z$, $\coth(iz) = -i \cot z$ であることを示せ。
(2) $\cos(iz) = \cosh z$, $\sin(iz) = i \sinh z$, $\tan(iz) = i \tanh z$, $\cot(iz) = -i \coth z$ であることを示せ。

問題 99. (逆三角関数、逆双曲線関数は、$\sqrt{\ }$ や log を使って表せることを理解するための問題)

(1) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sinh z$ を満たす z を求めよ (w で表せ)。ただし $\sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ とする。(arcsinh という記号は用いず、四則と $\sqrt{\ }$ で表すこと。)

(2) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sin z$ を満たす z を求めよ。(arcsin や $\sin^{-1}$ という記号は用いず…)

(3) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \tan z$ を満たす z を求めよ。(arctan や $\tan^{-1}$ という記号は用いず…)

解答

解答 86. $|z-c|<r$ を満たす z に対して、$f(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n$ とおくと、$f\colon D(c;r)\to\mathbb{C}$ は正則で、冪級数の項別微分定理から、

$$a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\quad(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$$

が得られる。これは $\{b_n\}$ についても同じで

$$b_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\quad(n\in\mathbb{N}\cup\{0\}).$$

ゆえに任意の n に対して $a_n=b_n$. ■

解答 87. (1) (なるべくゆっくりと式変形する。目標は $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ の形にする (a_n を求める) ことである。)

(a) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4+z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1\Leftrightarrow\left|\frac{-z}{4}\right|<1\Leftrightarrow|z|<4$ であるから、収束半径は 4.

(b) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{-i+z}=\frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1+iz}=i\cdot\frac{1}{1-(iz)}=i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ni^{n+1}z^n$$

である。収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1\Leftrightarrow|-iz|<1\Leftrightarrow|z|<1$ であるから、収束半径は 1. これから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-i)^2}&=-\left(\frac{1}{z-i}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ni^{n+1}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ni^{n+1}nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}i^{n+1}nz^{n-1}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mi^{m+2}(m+1)z^m=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ni^{n+2}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}i^n(n+1)z^n.\end{aligned}$$

収束半径は項別微分しても変わらないので、1.

(c) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}.$$

a_n を

$$a_n=\begin{cases}0 & (n\text{ は奇数})\\(-1)^k & (n=2k\ (k=0,1,\dots))\end{cases}$$

で定めると、

$$\frac{1}{z^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1\Leftrightarrow\left|-z^2\right|<1\Leftrightarrow|z|<1$ であるから、収束半径は 1.

(d) $\left(\mathrm{Tan}^{-1}z\right)'=\frac{1}{z^2+1}$ である。特に $\mathrm{Tan}^{-1}z$ は 0 の近傍で正則であるから、$z=0$ のまわりで Taylor 展開できる:

$$\mathrm{Tan}^{-1}z=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\quad(|z|<\exists r).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n=\left(\mathrm{Tan}^{-1}z\right)'=\frac{1}{z^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

ただし a_n は (c) で出て来たものである。ゆえに

$$(n+1)b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k+1\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

(e) $f(z) := \dfrac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z - 6}$ とおく。$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z - 6$ で割ると、商 $z+2$, 余り $3z - 7$ であるから、

$$f(z) = z + 2 + \frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z - 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A = 1$, $B = 2$. ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

$z + 2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2).$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3).$$

$f(z)$ の $z = 0$ のまわりの Taylor 展開の収束半径は、0 と $\{2, 3\}$ との距離 2 である。そして、

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2} - 2 \cdot \frac{1}{3^2}\right) z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36} z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n. \end{aligned}$$

(2) 目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$ の形に表すことである。

等比級数の和の公式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-1)^n. \end{aligned}$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{z-1}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z - 1| < 4$ であるから、収束半径は 4. ■

解答 88.

(1) 公比が z の等比級数であるから、収束の条件は $|z| < 1$ で、そのとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

収束円は $D(0; 1)$.

(2) (1) の冪級数を項別に微分したものであるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(-(z-1)^{-1}\right)' = (z-1)^{-2} = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

収束円は (1) と同じで $D(0;1)$.

(3) (2) の冪級数に z をかけたものになっている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

収束円は (2) と同じで $D(0;1)$.

(4) (3) の級数を項別微分して z をかけたものである。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\right)' = z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = z\frac{(z-1)^2\cdot 1 - 2(z-1)\cdot z}{(z-1)^4} = z\frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3} = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

収束円は (3) と同じで $D(0;1)$. ■

要するに「n をかける $\longleftrightarrow$ 微分して z をかける」ということ。数学検定の問題見本で見かけた「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ を求めよ。」という問題を来年度は問題に含めよう。

ちなみに Mathematica はこういう級数の和を計算してくれる。収束条件は表示してくれないが、簡略の検算にはなる。`Sum[n^2 z^n,{n,1,Infinity}]` とすると $-\dfrac{z(1+z)}{(-1+z)^3}$ という結果を返す。■

解答 89. どれでも同じだから、一つだけやっておく。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

である。$n\in\mathbb{N}$ のとき $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n=0$ のとき $(z^n)' = (1)' = 0$ であるので

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!} = e^z. \blacksquare$$

解答 90. 冪級数展開

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

を使って証明する。(こういう問題は何を使ってよいかで解答の仕方が異なるので、本当は問題文にそれを書かないといけない。一致の定理を使って証明せよ、という問題もあり得る。)

k を整数とするとき、

$$i^n = \begin{cases} 1 & (n\equiv 0 \pmod 4) \\ i & (n\equiv 1 \pmod 4) \\ -1 & (n\equiv 2 \pmod 4) \\ -i & (n\equiv 3 \pmod 4) \end{cases},\quad i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

であるから

$$i^n + (-i)^n = [1+(-1)^n]\, i^n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ 2\cdot i^n & (n \text{ が偶数}) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ (-1)^k 2 & (n \text{ が偶数}, n=2k), \end{cases}$$

$$i^n - (-i)^n = [1-(-1)^n]\, i^n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ 2\cdot i^n & (n \text{ が奇数}) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ (-1)^k 2i & (n \text{ が奇数}, n=2k+1).n \end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n+(-i)^n}{2}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cos z,$$
$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n-(-i)^n}{2i}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin z.\blacksquare$$

解答 91.

(1) $F(z):=f(z)f(c-z)$ とおく。積の微分法と合成関数の微分法と仮定 $f'=f$ により

$$\begin{aligned}F'(z)&=(f(z)f(c-z))'=(f(z))'\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(f(c-z))'=f'(z)f(c-z)+f(z)(-f'(c-z))\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0.\end{aligned}$$

ゆえに F は定数関数である。$F(0)=f(0)f(c)=1\cdot f(c)=f(c)$. ゆえに $F(z)\equiv f(c)$. すなわち $f(z)f(c-z)\equiv f(c)$.

(2) ((1) で言っているのは、$(\forall c\in\mathbb{C})$ $(\forall z\in\mathbb{C})$ $f(z)f(c-z)=f(c)$ ということである。)

任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して、$c=a+b$, $z=a$ とおくと、$c-z=b$ であるから、$f(a)f(b)=f(a+b)$. すなわち $e^ae^b=e^{a+b}$. $\blacksquare$

解答 92. (念のため状況の説明: 講義では早めに指数関数を使いたかったので、$e^{x+iy}:=e^x(\cos y+i\sin y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$ と定めたが、ここでは指数関数を $e^z:=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ と定義し、この冪級数の収束半径が ∞ であることは確認済みとする。また、指数法則も証明済みとする。)

まず指数法則により、任意の $x,\,y\in\mathbb{R}$ に対して

$$e^{x+iy}=e^xe^{iy}.$$

収束する級数は 2 項ずつまとめて和を取ることが出来る (部分和の作る数列が収束列であるから、その部分列は同じ極限を持つ収束列である)。ゆえに

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i^{2k}}{(2k)!}y^{2k}+\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}y^{2k+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k}+i\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}\right).$$

一方、

$$\cos y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k},\quad \sin y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}$$

であるから、

$$e^{iy}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}=\cos y+i\sin y.$$

ゆえに

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).\blacksquare$$

(注: 絶対収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は、自由な順番で和を取ることが出来て、例えば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}$ が成り立つ。このことを用いると、もっとストレートに証明出来る。)

解答 93. $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が収束冪級数とすると、$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+a_n=0$ $(n=0,1,\cdots)$ が導かれる。ゆえに $(n+2)!a_{n+2}+(n+1)!a_{n+1}+n!a_n=0$. 従って、$b_n:=n!a_n$ とおくと、$b_{n+2}+pb_{n+1}+qb_n=0$ が成り立つ。(定数係数の線形差分方程式の一般論から) ゆえに適当な C_1, C_2 を取ると、$b_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n$ $(n=0,1,\cdots)$ が成り立つ。これから $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_1\alpha^n+C_2\beta^n}{n!}z^n=C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha z)^n}{n!}+C_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta z)^n}{n!}=C_1e^{\alpha z}+C_2e^{\beta z}$. $\blacksquare$

解答 94. どちらの冪級数も、$z=c$ に対しては収束する。$z\neq c$ の場合を考える。

次が成り立つことに注意する。「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ が収束するならば、任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda A_n$ も収束し、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda A_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}A_n$.」

任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して、$\lambda=(z-c)^p$ として適用することで、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^{n+p}$ も収束することが分かる。

任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して、$\lambda=(z-c)^{-p}$ として適用することで、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^{n+p}$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ も収束することが分かる。

結局、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^{n+p}\text{ が収束する}\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\text{ も収束する}$$

が成り立つ。特に 2 つの冪級数の収束半径、収束円は一致する。■

解答 96. (実関数としての指数関数と、複素関数としての指数関数を区別するため、前者を e^x, 後者を $\exp z$ と表す約束で書いてみる。 — ここだけのローカル・ルール)

(1) (log がどういうものかまだ知らない場合の解答) z の実部と虚部をそれぞれ x, y と表す。$\exp z=\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$ で、$|\exp z|=e^x$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\exp z=1&\Leftrightarrow e^x(\cos y+i\sin y)=1\\&\Leftrightarrow e^x=1\quad\text{and}\quad\cos y+i\sin y=1\\&\Leftrightarrow e^x=1\quad\text{and}\quad\cos y=1\quad\text{and}\quad\sin y=0\\&\Leftrightarrow x=0\quad\text{and}\quad(\exists n\in\mathbb{Z})\quad y=2n\pi\\&\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=2n\pi i.\end{aligned}$$

(log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log 1$ は何か、という問題である。$1=1e^{i0}$ が 1 の極形式であるから

$$\log 1=\log 1+i(0+2n\pi)=2n\pi i\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(2) (log がどういうものかまだ知らない場合の解答) $\exp\pi i=-1$ であるから、

$$\begin{aligned}\exp z=-1&\Leftrightarrow\exp z\exp\pi i=1\\&\Leftrightarrow\exp(z+\pi i)=1\\&\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z+\pi i=2n\pi i\\&\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=(2n-1)\pi i.\end{aligned}$$

(log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log(-1)$ は何か、という問題である。$-1=1e^{i\pi}$ が -1 の極形式であるから

$$\log(-1)=\log 1+i(\pi+2n\pi)=(2n+1)\pi i\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(3) $\sin z=\dfrac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin z=0&\Leftrightarrow\exp(iz)-\exp(-iz)=0\\&\Leftrightarrow\exp(2iz)=1\\&\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}\quad\text{s.t.}\quad 2iz=2n\pi i\\&\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}\quad\text{s.t.}\quad z=n\pi.\end{aligned}$$

(あるいは $w:=\exp(iz)$ について $w-\frac{1}{w}=0$ から、$w^2-1=0$. これから $w=1$ または $w=-1$. 前者から $z=2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$, 後者から $z=(2m-1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$. まとめて $z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.)

(4) $\sin z = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ であるから、途中で $w := \exp(iz)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = 2 \\
&\Leftrightarrow \exp(iz) - \exp(-iz) = 4i \\
&\Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 4i \\
&\Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow w = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 - (-1)} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{\pi i/2}.
\end{aligned}$$

ただし、$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とするとき、

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が成り立つことを用いた。

$r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\exp z = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned}
\sin z = 2 &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad iz = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - i\log\left(2 \pm \sqrt{3}\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 97. 任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して (途中で $w_1 := e^{z_1}$, $w_2 := e^{z_2}$ とおいて)

$$\begin{aligned}
&\cos(z_1 + z_2) - (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\
&\quad = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} - \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[w_1 w_2 + \frac{1}{w_1}\frac{1}{w_2}\right] - \frac{1}{4}\left[\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right) + \left(w_1 - \frac{1}{w_1}\right)\left(w_2 - \frac{1}{w_2}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{4w_1 w_2}\left(2w_1^2 w_2^2 - (w_1^2 + 1)(w_2^2 + 1) - (w_1^2 - 1)(w_2^2 - 1)\right) \\
&\quad = \frac{1}{4w_1 w_2}\left(2w_1^2 w_2^2 - (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 + w_2^1 + 1) - (w_1^2 w_2^2 - w_1^2 - w_2^2 + 1)\right) = 0
\end{aligned}$$

より $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$. sin についても同様に出来る。 $\blacksquare$

解答 98.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\cosh(iz) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \\
\sinh(iz) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i\sin z, \\
\tanh(iz) &= \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i\sin z}{\cos z} = i\tan z, \\
\coth(iz) &= \frac{1}{i\tan z} = -i\cot z.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\cos(iz) &= \cosh\left(i^2 z\right) = \cosh(-z) = \cosh z, \\
\sin(iz) &= \frac{1}{i}\sinh\left(i^2 z\right) = -i \cdot \sinh(-z) = i\sinh z, \\
\tan(iz) &= \frac{1}{i}\tanh(i^2 z) = -i \cdot \tanh(-z) = i\tanh z, \\
\cot(iz) &= \frac{1}{-i}\coth(i^2 z) = i \cdot \coth(-z) = -i\coth z. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 99.

(1) $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ であるから、$Z := e^z$ とおくと、$w = \dfrac{Z - 1/Z}{2}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2wZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = w \pm \sqrt{w^2+1}.$$

$z=0$ のとき、$Z = e^z = 1$, $w = \sinh z = 0$ であるので、$w=0$ の十分小さな近傍に対して $Z=1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1}=1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合は $Z = w - \sqrt{w^2+1}$ は不適で、$Z = w + \sqrt{w^2+1}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = w + \sqrt{w^2+1}.$$

これから

$$z = \log Z = \log\left(w + \sqrt{w^2+1}\right).$$

(log は多価だから、1 つの w に複数の w が対応することが分かる。)

(2) (上とほぼ同様で) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であるから、$Z := e^{iz}$ とおくと、$w = \dfrac{Z - 1/Z}{2i}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2iwZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = iw \pm \sqrt{1-w^2}.$$

$z=0$ のとき、$Z = e^{iz} = 1$, $w = \sin z = 0$ であるので、$w=0$ の十分小さな近傍に対して $Z=1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1}=1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合は $Z = iw - \sqrt{1-w^2}$ は不適で、$Z = iw + \sqrt{1-w^2}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = iw + \sqrt{1-w^2}.$$

これから

$$iz = \log Z = \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

ゆえに

$$z = -i\log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

(3) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \dfrac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$ であるから、$Z := e^{iz}$ とおくと、

$$w = -i\frac{Z - 1/Z}{Z + 1/Z} = -i\frac{Z^2 - 1}{Z^2+1}.$$

これは Z^2 についての 1 次方程式で、解は $Z^2 = \dfrac{1+iw}{1-iw}$. これから

$$Z = \sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}}.$$

上と同様に、$w=0$ の十分小さな近傍に $Z=1$ の近傍が対応するようにするには、$\sqrt{1}=1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合、$Z = -\sqrt{\dfrac{1+iw}{1-iw}}$ は不適である。

$$iz = \operatorname{Log} Z = \log\sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}} = \frac{1}{2}\left(\log(1+iw) - \log(1-ix)\right).$$

ゆえに

$$z = \frac{i}{2}\left(\log(1-iw) - \log(1+iw)\right).\blacksquare$$

少しもやもやするところが残るかもしれないが、現時点までに分かったことを整理してみると、

- 指数関数、三角関数、双曲線関数は、自然に複素関数に拡張できる。それらの間に成り立つ関係式などは、複素関数でもそのまま成り立つ。

- 次のように定義する (そうするのが自然であると考えられるので)。

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} w &= \log\left(w+\sqrt{w^2+1}\right),\\
\arcsin w &= -i\log\left(iw+\sqrt{1-w^2}\right),\\
\arctan w &= \frac{i}{2}\left(\log(1-iw)-\log(1+iw)\right).
\end{aligned}
$$

- 指数関数、三角関数、双曲線関数の逆関数も複素関数に拡張できるが、多価性を持つ (のが普通であるらしい、全部確かめたわけではないが)。
- 対数関数は既に一定のレベルで解決している。
- 逆三角関数、逆双曲線関数は、対数関数と (補助的に) $\sqrt{\ }$ を用いて表示できる (らしい、全部確かめたわけではないが)。
- — ということは、対数関数の多価性 (これは既にはっきりわかっている) と $\sqrt{\ }$ の多価性が良く分かれば、逆三角関数と逆双曲線関数の多価性も理解できそうだ。