

複素関数・同演習 第27回

～説明し残っている有名定理～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2022年1月12日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 正則関数の性質
 - Liouville の定理と代数学の基本定理
 - 平均値の定理と最大値原理
- ③ Laurent 展開 (やり残し)
 - 孤立特異点の特徴づけ
 - Riemann の除去可能特異点定理
 - Casorati-Weierstrass の定理
 - 孤立特異点の \lim による特徴づけ
- ④ 「複素関数・同演習」の後に
- ⑤ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 関数論の有名な定理で紹介していないものを説明する。講義ノート [1] の §9.3, 9.4, §10.4 の内容である。
 - ① Liouville の定理と代数学の基本定理
 - ② Riemann の除去可能特異点定理, Casorati-Weierstrass の定理, 孤立特異点の \lim による特徴づけ
- 次回授業 (第 14 回複素関数) はオンライン (Zoom ミーティング) で行います。内容は以下の通り。
 - ① 宿題 13 の解説をする。
 - ② 残りは質問対応の時間とします。質問がある人は、面倒でもオンラインで質問できるように準備しておいて下さい。(式を書いたものを PDF にしておいて画面共有で見せる、タブレットを接続する、など)。

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定義 27.1

\mathbb{C} 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ は整関数である。

定理 27.2 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

証明

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則で、ある実数 M が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M$$

を満たすとする。

正則性の仮定より、 f は原点で冪級数展開出来て、その収束半径は $+\infty$ である。すなわち、ある複素数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が存在して

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数 R , 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\zeta|=R} |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(これを **Cauchy の評価式** と呼ぶ。)

$R \rightarrow +\infty$ として $|a_n| \leq 0$. ゆえに $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$ と書いてしたので $n > 0$ であることに注意).

(1) に代入して

$$f(z) = a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

ゆえに f は定数関数である。

□

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、 $P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、 $P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

証明.

背理法を用いる。 $P(z)$ が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した f は \mathbb{C} 全体で正則である。

実は f は有界である。実際、 $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$ であるから、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、 $|f|$ は \mathbb{C} 全体で連続であるから、有界閉集合 $\overline{D}(0; R)$ における $|f|$ の最大値 M が存在する (Weierstrass の最大値定理)。 $M' := \max\{1, M\}$ とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

以上より、 f は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、 f は定数関数である。ゆえに P も定数関数である。これは $P(z)$ が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

上で用いた $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$ の証明は分かるだろうか。当たり前を感じる？しかし、例えば $\lim_{z \rightarrow \infty} |e^z| = \infty$ は成り立たない。念のため $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$ を証明しておこう。

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

補題 27.4 (多項式の $z \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ ($a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$) とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

証明.

$z \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \rightarrow 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \rightarrow 1.$$

ゆえに任意の正の数 ε に対して、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

これから

$$(1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

9.5 平均値の定理と最大値原理

定理 27.5 (平均値の定理 (the mean-value property))

Ω は \mathbb{C} の領域で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$ とするとき、 $\overline{D}(c; r) \subset \Omega$ を満たす任意の $r > 0$ に対して

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta.$$

(右辺は、円周 $|z - c| = r$ における f の平均値であることに注意)

証明.

Cauchy の積分公式を用い、積分路を $\zeta = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とパラメータづけると

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

□

9.5 平均値の定理と最大値原理

定理 27.6 (最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem))

Ω は \mathbb{C} の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $z_0 \in \Omega$,

$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$

が成り立つならば、 f は定数関数である。

(正則関数の絶対値が、ある内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

証明

$M := |f(z_0)|$ とおく。

Ω は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ 。

$\rho := \varepsilon/2$ とおくと、 $\overline{D}(z_0; \rho) \subset \Omega$ 。

$0 < r \leq \rho$ なる任意の r に対して、平均値の定理から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M.$$

(つづく)

9.5 平均値の定理と最大値原理

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$ は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$ であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ ($|z - z_0| = r$).

(\because どこか 1 点 θ_0 で $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < M$ であれば、連続性から θ_0 の十分小さな近傍で $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z)| = M$ ($|z - z_0| \leq \rho$).

ゆえに f 自身が $D(z_0; \rho)$ で定数関数 C に等しい (\because Cauchy-Riemann のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。

一致の定理により Ω 全体で $f = C$. □

余談: 実は調和関数についても、平均値の定理と最大値原理が成り立ち、様々な応用がある。

定理 27.7 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則かつ有界とする。このとき c は f の除去可能特異点である。

証明

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \leq M.$$

f が $A(c; 0, \varepsilon)$ で正則なことから、ある複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; 0, \varepsilon)).$$

そして、任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $0 < r < \varepsilon$ を満たす任意の r に対して

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n \in \mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

$r \rightarrow 0$ とすると $|a_{-n}| = 0$. ゆえに $a_{-n} = 0$.

ゆえに f の c における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち c は f の除去可能特異点である。□

Liouville の定理 (定理 27.2) の証明と並べてみると、類似点に分かって面白く感じられるかもしれない。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

定理 27.8 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall \beta \in \mathbb{C})(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall n \in \mathbb{N})z_n \neq c) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta.$$

特に $\lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$ は確定しない。

証明

$\beta \in \mathbb{C}$ とする。次を示せば良い。

$$(\star) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\forall r \in (0, R))(\exists z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

((\star) を示せば良いことの確認: $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $\varepsilon = r = \min\{\frac{1}{n}, R\}$) として用いると、

$$(\exists z_n) : 0 < |z_n - c| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}.$$

こうして作った $\{z_n\}$ に対して、 $n \rightarrow \infty$ のとき $z_n \rightarrow c$ かつ $f(z_n) \rightarrow \beta$ が成り立つ。) (つづく)

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

(*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、 g は $A(c; \varepsilon, r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z) \neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。さらに $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、 c は g の除去可能特異点である。ゆえに g は $D(c; r)$ で正則であるように拡張できる。

(*) を $f(z)$ について解く。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} \quad (z \in A(c; 0, r)).$$

(つづく)

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き).

場合分けする。

- (i) $g(c) \neq 0$ ならば c は f の除去可能特異点である。
- (ii) $g(c) = 0$ ならば、 c は g の零点である。その位数を k とすると、 c は f の k 位の極である。

どちらも、 c が f の真性特異点であることに矛盾する。



10.4.3 孤立特異点の \lim による特徴づけ

定理 27.9 (孤立特異点の \lim による特徴づけ)

c が f の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

- ① c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$ は収束。すなわち $(\exists A \in \mathbb{C}) \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = A$.
- ② c が f の極 $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = \infty$.
- ③ c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$ は収束しないし、 ∞ に発散もしない。

証明.

(1), (2) の \Rightarrow は証明済みである (比較的簡単)。

Casorati-Weierstrass の定理により、(3) の \Rightarrow が成立することも分かった。

任意の孤立特異点は、除去可能特異点、極、真性特異点のいずれかであるので、(1), (2), (3) の \Leftarrow が成立する。 □

10.4.3 孤立特異点の \lim による特徴づけ

Cf. 分類になっているとき、 \Rightarrow から \Leftarrow が導かれる、という論法は、次の定理の証明でも使える。

実係数の2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、 $D := b^2 - 4ac$ とおくと

- $D > 0 \Leftrightarrow$ 2つの相異なる実根を持つ。
- $D = 0 \Leftrightarrow$ 1つの実根 (重根) を持つ。
- $D < 0 \Leftrightarrow$ 2つの相異なる虚根を持つ。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

長い話、最後まで視聴してくれた人、お疲れさまです。

「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードの紹介くらい。
留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超関数論、などなど

関数論はなかなか広大。

- 現象数理学科には「応用複素関数」という科目がある。上に書いた関数論の続きというよりは、応用事例の紹介が主な内容である（「コンピューター数理」の科目）。留数定理による級数の和の計算、流体のポテンシャル流、ポテンシャル問題、等角写像の数値計算、数値積分の誤差解析、佐藤の超関数の紹介、などなど（毎年迷いながらやっている）。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).