

# 複素関数・同演習 第27回

～説明し残っている有名定理～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2022年1月12日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 正則関数の性質
  - Liouville の定理と代数学の基本定理
  - 平均値の定理と最大値原理
- 3 Laurent 展開 (やり残し)
  - 孤立特異点の特徴づけ
    - Riemann の除去可能特異点定理
    - Casorati-Weierstrass の定理
    - 孤立特異点の  $\lim$  による特徴づけ
- 4 「複素関数・同演習」の後に
- 5 参考文献

# 本日の内容・連絡事項

- 関数論の有名な定理で紹介していないものを説明する。講義ノート [1] の §9.3, 9.4, §10.4 の内容である。
  - ① Liouville の定理と代数学の基本定理
  - ② Riemann の除去可能特異点定理, Casorati-Weierstrass の定理, 孤立特異点の  $\lim$  による特徴づけ
- 次回授業 (第 14 回複素関数) はオンライン (Zoom ミーティング) で行います。内容は以下の通り。
  - ① 宿題 13 の解説をする。
  - ② 残りは質問対応の時間とします。質問がある人は、面倒でもオンラインで質問できるように準備しておいて下さい。(式を書いたものを PDF にしておいて画面共有で見せる、タブレットを接続する、など)。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定義 27.1

$\mathbb{C}$  全体で正則な関数を **整関数** (entire function) と呼ぶ。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定義 27.1

$\mathbb{C}$  全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数,  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\cosh z$ ,  $\sinh z$  は整関数である。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定義 27.1

$\mathbb{C}$  全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数,  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\cosh z$ ,  $\sinh z$  は整関数である。

### 定理 27.2 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定義 27.1

$\mathbb{C}$  全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数,  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\cosh z$ ,  $\sinh z$  は整関数である。

### 定理 27.2 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

### 証明

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則で、ある実数  $M$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M$$

を満たすとする。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定義 27.1

$\mathbb{C}$  全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数,  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\cosh z$ ,  $\sinh z$  は整関数である。

### 定理 27.2 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

### 証明

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則で、ある実数  $M$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M$$

を満たすとする。

正則性の仮定より、 $f$  は原点で冪級数展開出来て、その収束半径は  $+\infty$  である。すなわち、ある複素数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が存在して

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$



## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数  $R$ , 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数  $R$ , 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\zeta|=R} |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(これを **Cauchy の評価式** と呼ぶ。)

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数  $R$ , 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\zeta|=R} |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(これを **Cauchy の評価式** と呼ぶ。)

$R \rightarrow +\infty$  として  $|a_n| \leq 0$ . ゆえに  $a_n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$  と書いてしたので  $n > 0$  であることに注意).

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数  $R$ , 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\zeta|=R} |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(これを **Cauchy の評価式** と呼ぶ。)

$R \rightarrow +\infty$  として  $|a_n| \leq 0$ . ゆえに  $a_n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$  と書いてしたので  $n > 0$  であることに注意).

(1) に代入して

$$f(z) = a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

ゆえに  $f$  は定数関数である。 □

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$  が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、 $P(z)$  は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$  が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、 $P(z)$  は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、 $P(z)$  は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$  が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、 $P(z)$  は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、 $P(z)$  は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

### 証明.

背理法を用いる。 $P(z)$  が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$  が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、 $P(z)$  は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、 $P(z)$  は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

### 証明.

背理法を用いる。 $P(z)$  が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した  $f$  は  $\mathbb{C}$  全体で正則である。



## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$  が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、 $P(z)$  は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(この定理を認めれば、後は因数定理と帰納法によって、 $P(z)$  は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できることがすぐ分かる。)

### 証明.

背理法を用いる。 $P(z)$  が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した  $f$  は  $\mathbb{C}$  全体で正則である。

実は  $f$  は有界である。実際、 $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$  であるから、ある実数  $R$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、 $|f|$  は  $\mathbb{C}$  全体で連続であるから、有界閉集合  $\overline{D}(0; R)$  における  $|f|$  の最大値  $M$  が存在する (Weierstrass の最大値定理)。  $M' := \max\{1, M\}$  とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、 $|f|$  は  $\mathbb{C}$  全体で連続であるから、有界閉集合  $\overline{D}(0; R)$  における  $|f|$  の最大値  $M$  が存在する (Weierstrass の最大値定理)。 $M' := \max\{1, M\}$  とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

以上より、 $f$  は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、 $f$  は定数関数である。ゆえに  $P$  も定数関数である。これは  $P(z)$  が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、 $|f|$  は  $\mathbb{C}$  全体で連続であるから、有界閉集合  $\overline{D}(0; R)$  における  $|f|$  の最大値  $M$  が存在する (Weierstrass の最大値定理)。 $M' := \max\{1, M\}$  とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

以上より、 $f$  は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、 $f$  は定数関数である。ゆえに  $P$  も定数関数である。これは  $P(z)$  が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

上で用いた  $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$  の証明は分かるだろうか。当たり前を感じる？しかし、例えば  $\lim_{z \rightarrow \infty} |e^z| = \infty$  は成り立たない。念のため  $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$  を証明しておこう。

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 補題 27.4 (多項式の $z \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$ ) とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 補題 27.4 (多項式の $z \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$ ) とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

### 証明.

$z \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \rightarrow 1.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 補題 27.4 (多項式の $z \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$ ) とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

### 証明.

$z \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \rightarrow 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \rightarrow 1.$$



## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 補題 27.4 (多項式の $z \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$ ) とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

### 証明.

$z \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \rightarrow 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \rightarrow 1.$$

ゆえに任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、ある実数  $R$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

## 9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

### 補題 27.4 (多項式の $z \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$ ) とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

### 証明.

$z \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \rightarrow 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \rightarrow 1.$$

ゆえに任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、ある実数  $R$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

これから

$$(1 - \varepsilon) |a_0| |z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_0| |z|^n.$$

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 定理 27.5 (平均値の定理 (the mean-value property))

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の領域で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$  とするとき、 $\overline{D}(c; r) \subset \Omega$  を満たす任意の  $r > 0$  に対して

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta.$$

(右辺は、円周  $|z - c| = r$  における  $f$  の平均値であることに注意)

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 定理 27.5 (平均値の定理 (the mean-value property))

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の領域で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$  とするとき、 $\overline{D}(c; r) \subset \Omega$  を満たす任意の  $r > 0$  に対して

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta.$$

(右辺は、円周  $|z - c| = r$  における  $f$  の平均値であることに注意)

### 証明.

Cauchy の積分公式を用い、積分路を  $\zeta = c + re^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とパラメータづけると

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

□

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 定理 27.6 (最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem))

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $z_0 \in \Omega$ ,

$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$

が成り立つならば、 $f$  は定数関数である。

(正則関数の絶対値が、ある内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

### 証明

$M := |f(z_0)|$  とおく。

$\Omega$  は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ 。

$\rho := \varepsilon/2$  とおくと、 $\overline{D}(z_0; \rho) \subset \Omega$ 。

$0 < r \leq \rho$  なる任意の  $r$  に対して、平均値の定理から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M.$$

(つづく)

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$  は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$  であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$  は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$  であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| = r$ ).

( $\because$  どこか 1 点  $\theta_0$  で  $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < M$  であれば、連続性から  $\theta_0$  の十分小さな近傍で  $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$ ). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。



## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$  は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$  であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| = r$ ).

( $\because$  どこか 1 点  $\theta_0$  で  $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < M$  であれば、連続性から  $\theta_0$  の十分小さな近傍で  $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$ ). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

$r$  の任意性から  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| \leq \rho$ ).

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$  は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$  であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| = r$ ).

( $\because$  どこか 1 点  $\theta_0$  で  $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < M$  であれば、連続性から  $\theta_0$  の十分小さな近傍で  $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$ ). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

$r$  の任意性から  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| \leq \rho$ ).

ゆえに  $f$  自身が  $D(z_0; \rho)$  で定数関数  $C$  に等しい ( $\because$  Cauchy-Riemann のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$  は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$  であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| = r$ ).

( $\because$  どこか 1 点  $\theta_0$  で  $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < M$  であれば、連続性から  $\theta_0$  の十分小さな近傍で  $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$ ). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

$r$  の任意性から  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| \leq \rho$ ).

ゆえに  $f$  自身が  $D(z_0; \rho)$  で定数関数  $C$  に等しい ( $\because$  Cauchy-Riemann のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。

一致の定理により  $\Omega$  全体で  $f = C$ .

□

## 9.5 平均値の定理と最大値原理

### 証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$  は連続で、 $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$  であるから

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| = r$ ).

( $\because$  どこか 1 点  $\theta_0$  で  $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < M$  であれば、連続性から  $\theta_0$  の十分小さな近傍で  $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$ ). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

$r$  の任意性から  $|f(z)| = M$  ( $|z - z_0| \leq \rho$ ).

ゆえに  $f$  自身が  $D(z_0; \rho)$  で定数関数  $C$  に等しい ( $\because$  Cauchy-Riemann のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。

一致の定理により  $\Omega$  全体で  $f = C$ . □

余談: 実は調和関数についても、平均値の定理と最大値原理が成り立ち、様々な応用がある。

#### 定理 27.7 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則かつ有界とする。このとき  $c$  は  $f$  の除去可能特異点である。

## 定理 27.7 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則かつ有界とする。このとき  $c$  は  $f$  の除去可能特異点である。

## 証明

仮定より、ある  $M \in \mathbb{R}$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \leq M.$$

## 定理 27.7 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則かつ有界とする。このとき  $c$  は  $f$  の除去可能特異点である。

## 証明

仮定より、ある  $M \in \mathbb{R}$  が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \leq M.$$

$f$  が  $A(c; 0, \varepsilon)$  で正則なことから、ある複素数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; 0, \varepsilon)).$$

そして、任意の  $n \in \mathbb{Z}$  と  $0 < r < \varepsilon$  を満たす任意の  $r$  に対して

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

## 10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$



## 10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に  $n \in \mathbb{N}$  のとき

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

## 10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に  $n \in \mathbb{N}$  のとき

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

$r \rightarrow 0$  とすると  $|a_{-n}| = 0$ . ゆえに  $a_{-n} = 0$ .

## 10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に  $n \in \mathbb{N}$  のとき

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

$r \rightarrow 0$  とすると  $|a_{-n}| = 0$ . ゆえに  $a_{-n} = 0$ .

ゆえに  $f$  の  $c$  における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち  $c$  は  $f$  の除去可能特異点である。□

## 10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

(つづき) ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に  $n \in \mathbb{N}$  のとき

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < \varepsilon).$$

$r \rightarrow 0$  とすると  $|a_{-n}| = 0$ . ゆえに  $a_{-n} = 0$ .

ゆえに  $f$  の  $c$  における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち  $c$  は  $f$  の除去可能特異点である。□

Liouville の定理 (定理 27.2) の証明と並べてみると、類似点に分かって面白く感じられるかもしれない。

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 定理 27.8 (Casorati-Weierstrass)

$c$  が  $f$  の孤立真性特異点ならば

$$(\forall \beta \in \mathbb{C})(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall n \in \mathbb{N})z_n \neq c) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta.$$

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 定理 27.8 (Casorati-Weierstrass)

$c$  が  $f$  の孤立真性特異点ならば

$$(\forall \beta \in \mathbb{C})(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall n \in \mathbb{N})z_n \neq c) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta.$$

特に  $\lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は確定しない。

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 定理 27.8 (Casorati-Weierstrass)

$c$  が  $f$  の孤立真性特異点ならば

$$(\forall \beta \in \mathbb{C})(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall n \in \mathbb{N})z_n \neq c) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta.$$

特に  $\lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は確定しない。

### 証明

$\beta \in \mathbb{C}$  とする。次を示せば良い。

$$(\star) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\forall r \in (0, R))(\exists z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 定理 27.8 (Casorati-Weierstrass)

$c$  が  $f$  の孤立真性特異点ならば

$$(\forall \beta \in \mathbb{C})(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall n \in \mathbb{N})z_n \neq c) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta.$$

特に  $\lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は確定しない。

### 証明

$\beta \in \mathbb{C}$  とする。次を示せば良い。

$$(\star) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\forall r \in (0, R))(\exists z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

(( $\star$ ) を示せば良いことの確認:  $n = 1, 2, \dots$  に対して、 $\varepsilon = r = \min\{\frac{1}{n}, R\}$ ) として用いると、

$$(\exists z_n) : 0 < |z_n - c| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}.$$

こうして作った  $\{z_n\}$  に対して、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $z_n \rightarrow c$  かつ  $f(z_n) \rightarrow \beta$  が成り立つ。) (つづく)



## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き)

(\*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き)

(\*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き)

(\*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、 $g$  は  $A(c; e, r)$  で正則であり (分母が 0 にならないから)、また  $g(z) \neq 0$ . 特に  $c$  は  $g$  の孤立特異点である。

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き)

(\*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、 $g$  は  $A(c; \varepsilon, r)$  で正則であり (分母が 0 にならないから)、また  $g(z) \neq 0$ . 特に  $c$  は  $g$  の孤立特異点である。さらに  $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、 $c$  は  $g$  の除去可能特異点である。

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き)

(\*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、 $g$  は  $A(c; \varepsilon, r)$  で正則であり (分母が 0 にならないから)、また  $g(z) \neq 0$ . 特に  $c$  は  $g$  の孤立特異点である。さらに  $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、 $c$  は  $g$  の除去可能特異点である。ゆえに  $g$  は  $D(c; r)$  で正則であるように拡張できる。

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き)

(\*) を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、 $g$  は  $A(c; \varepsilon, r)$  で正則であり (分母が 0 にならないから)、また  $g(z) \neq 0$ . 特に  $c$  は  $g$  の孤立特異点である。さらに  $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、 $c$  は  $g$  の除去可能特異点である。ゆえに  $g$  は  $D(c; r)$  で正則であるように拡張できる。

(\*) を  $f(z)$  について解く。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} \quad (z \in A(c; 0, r)).$$

(つづく)

## 10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

### 証明 (続き).

場合分けする。

- (i)  $g(c) \neq 0$  ならば  $c$  は  $f$  の除去可能特異点である。
- (ii)  $g(c) = 0$  ならば、 $c$  は  $g$  の零点である。その位数を  $k$  とすると、 $c$  は  $f$  の  $k$  位の極である。

どちらも、 $c$  が  $f$  の真性特異点であることに矛盾する。



## 10.4.3 孤立特異点の $\lim$ による特徴づけ

### 定理 27.9 (孤立特異点の $\lim$ による特徴づけ)

$c$  が  $f$  の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

- ①  $c$  が  $f$  の除去可能特異点  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は収束。すなわち  $(\exists A \in \mathbb{C}) \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = A$ .
- ②  $c$  が  $f$  の極  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = \infty$ .
- ③  $c$  が  $f$  の真性特異点  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は収束しないし、 $\infty$  に発散もしない。



## 10.4.3 孤立特異点の $\lim$ による特徴づけ

### 定理 27.9 (孤立特異点の $\lim$ による特徴づけ)

$c$  が  $f$  の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

- ①  $c$  が  $f$  の除去可能特異点  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は収束。すなわち  $(\exists A \in \mathbb{C}) \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = A$ .
- ②  $c$  が  $f$  の極  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = \infty$ .
- ③  $c$  が  $f$  の真性特異点  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$  は収束しないし、 $\infty$  に発散もしない。

### 証明.

(1), (2) の  $\Rightarrow$  は証明済みである (比較的簡単)。

Casorati-Weierstrass の定理により、(3) の  $\Rightarrow$  が成立することも分かった。

任意の孤立特異点は、除去可能特異点、極、真性特異点のいずれかであるので、(1), (2), (3) の  $\Leftarrow$  が成立する。 □

### 10.4.3 孤立特異点の $\lim$ による特徴づけ

Cf. 分類になっているとき、 $\Rightarrow$  から  $\Leftarrow$  が導かれる、という論法は、次の定理の証明でも使える。

実係数の2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  について、 $D := b^2 - 4ac$  とおくとき

- $D > 0 \Leftrightarrow$  2つの相異なる実根を持つ。
- $D = 0 \Leftrightarrow$  1つの実根(重根)を持つ。
- $D < 0 \Leftrightarrow$  2つの相異なる虚根を持つ。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

長い話、最後まで視聴してくれた人、お疲れさまです。

## 「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードの紹介くらい。

留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超関数論、などなど

関数論はなかなか広大。

## 「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードの紹介くらい。  
留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超関数論、などなど

関数論はなかなか広大。

- 現象数理学科には「応用複素関数」という科目がある。上に書いた関数論の続きというよりは、応用事例の紹介が主な内容である（「コンピューター数理」の科目）。留数定理による級数の和の計算、流体のポテンシャル流、ポテンシャル問題、等角写像の数値計算、数値積分の誤差解析、佐藤の超関数の紹介、などなど（毎年迷いながらやっている）。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).