複素関数・同演習 第 26 回
〜定積分計算への留数の応用〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2022 年 1 月 11 日

目次

本日の内容・連絡事項

授業は今日を含めて残り 3 回です。

- 定積分計算への留数の応用について説明する。
(講義ノート [1] の §13 の内容で、そちらは他にも色々書いてあるが、この前回と今回の授業で説明したことだけマスターすれば十分。)
- 宿題 12 の解説をします。
- 宿題 13 を出します (提出〆切は 2022 年 1 月 18 日 13:30)。
- 次回の複素関数 (1 月 18 日 3 限) の内容は、宿題 13 の解説と、質問対応とします。質問の相手は Zoom でのみ受け付けます (詳しいことは次回説明します)。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の定理は前回紹介済みである。証明が残っている。

定理 25.5 (有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分 (再掲))

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \neq 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c > 0} \mathrm{Res}(f; c).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, c>0}$ は、f の極 c のうち、$\mathrm{Im}\, c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

証明

仮定からある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \land |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| = \left|z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)}\right| = \left|z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n}\right| \to \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \quad (z \to \infty)$$

が分かるから、$M := 2\left|\frac{b_0}{a_0}\right|$ とおくと、ある $R^*(\geq 1)$ が存在して

$$\left|z^{n-m} f(z)\right| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*)$$

が成り立つ。)

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

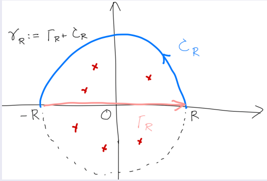
証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

$$I=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,dx.\quad (\text{一般には}\lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2}\text{だけど}\cdots)$$

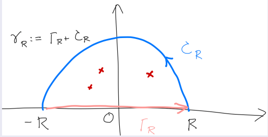
複素平面内の曲線 Γ_R, C_R, γ_R を次式で定める。

$$\Gamma_R\colon z=x\quad (x\in[-R,R]),$$
$$C_R\colon z=Re^{i\theta}\quad (\theta\in[0,\pi]),$$
$$\gamma_R:=\Gamma_R+C_R.$$



$R\ge R^*$ を満たす任意の R に対して、P の零点は $|z|<R$ に含まれる。$\operatorname{Im} c>0$ を満たす零点 c は γ_R の内部に含まれる。

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{M}{R^2}\int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

一方、留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f; c).$$

ゆえに

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \to 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f; c) \quad (R \to +\infty). \qquad \square$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、共役 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \qquad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi\in\mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \qquad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \quad (x\in\mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

念のため:

$$(\forall a\in\mathbb{R})\quad \overline{e^{iax}} = e^{-iax},\quad \cos(ax) = \operatorname{Re} e^{iax},\quad \sin(ax) = \operatorname{Im} e^{iax},\quad \left|e^{iax}\right| = 1$$

を思い出しておこう。

定理 26.1 (有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \neq 0$, $a > 0$ とするとき、

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c > 0} \mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, c>0}$ は、f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、$\mathrm{Im}\, c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

証明

定理 25.5 の証明と同様にして、ある定数 M, $R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|}.$$

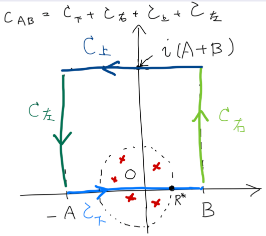
(つづく)

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{下}$, $C_{右}$, $C_{上}$, $C_{左}$, C_{AB} を次のように定める。

$$
\begin{aligned}
&C_{下}: z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
&C_{右}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
&C_{上}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),\\
&C_{左}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),\\
&C_{AB} := C_{下} + C_{右} + C_{上} + C_{左}.
\end{aligned}
$$



P の零点はすべて $|z| < R^*$ に含まれ、上半平面に属するものは C_{AB} の内部にある (実軸上にはないので C_{AB} 上にもない)。ゆえに留数定理によって

$$
\int_{C_{AB}} f(z) e^{iax}\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).
$$

(つづく)

証明 (つづき)

$C_{下}$ に沿う積分は ($z=x$ ($x\in[-A,B]$) がパラメーター付けなので)

$$\int_{C_{下}} f(z)e^{iaz}\,dz=\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

$C_{右}$ で

$$|z|=\sqrt{B^2+y^2}\ge B,\quad |f(z)|\le\frac{M}{|z|}\le\frac{M}{B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz)=\mathrm{Re}\left[ia(B+iy)\right]=-ay,\quad \left|e^{iaz}\right|=e^{\mathrm{Re}(iaz)}=e^{-ay}$$

であるから

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right|\le\frac{M}{B}\int_0^{A+B}e^{-ay}dy\le\frac{M}{B}\int_0^{\infty}e^{-ay}\,dy=\frac{M}{aB}.$$

$C_{左}$ もほぼ同様にして

$$\left|\int_{C_{右}} f(z)e^{iaz}\right|\le\frac{M}{aA}.$$

証明 (つづき)

$C_{上}$ では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\mathrm{Re}(iaz) = \mathrm{Re}[ia(-x+i(A+B))] = -a(A+B), \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left|\int_{C_{上}} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \frac{M}{A+B}\int_{-A}^{B} e^{-a(A+B)}\,dx = Me^{-a(A+B)}.$$

ゆえに

$$I = \lim_{A,B\to+\infty}\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{A,B\to+\infty}\left(\int_{C_{AB}} - \int_{C_{右}} - \int_{C_{上}} - \int_{C_{左}}\right)$$

$$= \lim_{A,B\to+\infty}\left(2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right) - \int_{C_{右}} - \int_{C_{左}} - \int_{C_{上}}\right)$$

$$= 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$ (注: 広義積分の収束も同時に証明できている) □

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の注意は細かいので、講義では軽く触れるにとどめる。

注意 26.2 (定理 26.1 の仮定と証明法について)

仮定 $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$ は、定理 25.5 の条件 ($\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$) より弱い。

強い条件 $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$ を仮定した場合は (そういうテキストが少なくない)、$a \ge 0$ に対して (つまり $a = 0$ も OK になる) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、定理 25.5 の証明で用いた簡単な $\gamma_R = \Gamma_R + C_R$ が採用できる。また

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\, dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ($0 < e^{-aR\sin\theta} \le 1$ より $0 < \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta \le \pi$ が導かれる)。

Cf. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ は発散、$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ は絶対収束, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ は条件収束 (絶対収束しない)。 □

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、$a \le 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。$a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 26.3 ($a < 0$ の場合の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \ne 0$, $a < 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right). \tag{2}$$

しかし、系 26.3 を使うのでなく、計算の工夫により、定理 26.1 に帰着できる例を説明するテキストが多い。これについては、以下の例を見よ。

例 26.4

(3)
$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}; i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、$e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+1}\,dx} = \overline{2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iaz}}{z^2+1}; i\right)} = \overline{2\pi i \cdot \left.\frac{e^{-iaz}}{2z}\right|_{z=i}}$$
$$= \overline{\pi e^{a}} = \pi e^{a}.$$

例 26.4 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、 (3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。 □

余談 1 (Mathematica で検算するときに)

Mathematica で計算する際に、a の符号を教えるには、例えば

```
Assuming[a>0, Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]
```

のようにすれば良い。 □

例 26.5

$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、$\sin x=\operatorname{Im} e^{ix}$ であることから

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

$P(z):=z^2+1$, $Q(z):=z$, $a:=1$ とすると、定理 26.1 の条件が成り立つ。ゆえに

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+1}e^{iz};i\right)\right)=\operatorname{Im}\left(\pi i\cdot\left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=i}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi ie^{i^2}\right)=\frac{\pi}{2e}.\qquad\square$$

まず例から始める。

例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}.$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{5-4\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{5z-2(z^2+1)}dz$$

$$= i\int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2-5z+2} = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(z-2)}$$

$$= i\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; c\right) = -2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; \frac{1}{2}\right)$$

$$= -2\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(2z-1)(z-2)} = -2\pi\frac{1}{2(\frac{1}{2}-2)} = \frac{2\pi}{3}.$$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$ があっても OK.

例 26.7

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\sin\theta}$$

$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{1}{2i}(z-1/z)}\cdot\frac{dz}{iz} = 2\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6iz-1} \\
&= 2\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz-1}; c\right) = 4\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+6iz+1}; (-3+2\sqrt{2})i\right) \\
&= 4\pi i \lim_{z\to(-3+2\sqrt{2})i} \frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i} = 4\pi i\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

結局 $\cos\theta$, $\sin\theta$ の有理式の $[0, 2\pi]$ における積分は、このやり方で計算できることが分かる。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

定理 26.8 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x,y)$ を x, y の有理式とするとき、

(4a) $$\int_0^{2\pi} r(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}(f;c).$$

ただし f は

(4b) $$f(z) := \frac{1}{iz}\, r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、$f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\displaystyle\sum_{|c|<1}$ は、f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

注意: $\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\sin\theta = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ であるが、そう変形してしまうと、z の正則関数ではないので、留数定理が使えなくなる。z でなくて、z^{-1} を使うのがポイント。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

例 26.9

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}$$

$z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、これは $|z|=1$ のパラメーター表示であり、

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

また $dz=ie^{i\theta}d\theta$ より、$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. ゆえに $\left(\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}\right.$ に注意して)

$$\begin{aligned}I&=\int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2iz+i(z^2+1)/2+(z^2-1)/2}\\&=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(i+1)z^2+4iz+(i-1)}=(1-i)\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2(1+i)z+i}.\end{aligned}$$

ここからどうするか。閉曲線に沿う線積分だから、留数定理の利用を考える。特異点を探せ。それは分母の零点だ。それを求めよう。それから閉曲線の中に入っているものを探す。そして留数を計算する。図を描いて考える。 (つづく)

例 26.9 (つづき)

$z^2 + 2(1+i)z + i = 0$ の根は

$$z = -(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - i} = -(1+i) \pm \sqrt{i} = -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

前者を α, 後者を β とすると、このうち $|z| < 1$ にあるのは β.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 2(1+i)z + i}; \beta\right) = \lim_{z \to \beta}\left((z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta + \sin\theta} = (1-i) \cdot 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)} = \sqrt{2}\pi. \quad \square$$

定積分計算の話題に詳しいテキストとして、一松 [2] をあげておく。色々面白い例が載っている。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] 一松信（ひとつまつしん）：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。