

# 複素関数・同演習 第 26 回

## ～定積分計算への留数の応用～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2022 年 1 月 11 日

# 目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 定積分計算への留数の応用
  - 有理関数の  $\mathbb{R}$  上の積分
  - 有理関数  $\times e^{iax}$  の  $\mathbb{R}$  上の積分
  - 三角関数の有理関数の周期積分
- ③ 参考文献

授業は今日を含めて残り 3 回です。

- 定積分計算への留数の応用について説明する。  
(講義ノート [1] の §13 の内容で、そちらは他にも色々書いてあるが、この前回と今回の授業で説明したことだけマスターすれば十分。)
- 宿題 12 の解説をします。
- 宿題 13 を出します (提出 $\times$ 切は 2022 年 1 月 18 日 13:30)。
- 次回の複素関数 (1 月 18 日 3 限) の内容は、宿題 13 の解説と、質問対応とします。質問の相手は Zoom でのみ受け付けます (詳しいことは次回説明します)。

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の定理は前回紹介済みである。証明が残っている。

### 定理 25.5 (有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分 (再掲))

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ , ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )  
 $P(x) \neq 0$  とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

ここで  $\sum_{\operatorname{Im} c > 0}$  は、 $f$  の極  $c$  のうち、 $\operatorname{Im} c > 0$  を満たすものすべてについての和  
を取ることを意味する。

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明

仮定からある定数  $M, R^*(\geq 1)$  が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明

仮定からある定数  $M$ ,  $R^*(\geq 1)$  が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明:  $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$ ,  $b_0 \neq 0$  とする。仮定から  $n - m \geq 2$  である。

$$|z^{n-m} f(z)| = \left| z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| = \left| z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \right| \rightarrow \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \quad (z \rightarrow \infty)$$

が分かる

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明

仮定からある定数  $M, R^*(\geq 1)$  が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明:  $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m, b_0 \neq 0$  とする。仮定から  $n - m \geq 2$  である。

$$|z^{n-m} f(z)| = \left| z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| = \left| z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \right| \rightarrow \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \quad (z \rightarrow \infty)$$

が分かるから、 $M := 2 \left| \frac{b_0}{a_0} \right|$  とおくと、ある  $R^*(\geq 1)$  が存在して

$$|z^{n-m} f(z)| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明

仮定からある定数  $M, R^*(\geq 1)$  が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明:  $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m, b_0 \neq 0$  とする。仮定から  $n - m \geq 2$  である。

$$|z^{n-m} f(z)| = \left| z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| = \left| z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \right| \rightarrow \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \quad (z \rightarrow \infty)$$

が分かるから、 $M := 2 \left| \frac{b_0}{a_0} \right|$  とおくと、ある  $R^*(\geq 1)$  が存在して

$$|z^{n-m} f(z)| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*)$$

が成り立つ。)



## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど...})$$

# 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

## 証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

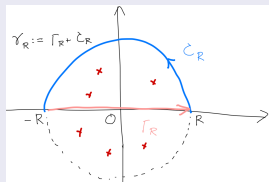
$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど...})$$

複素平面内の曲線  $\Gamma_R$ ,  $C_R$ ,  $\gamma_R$  を次式で定める。

$$\Gamma_R: z = x \quad (x \in [-R, R]),$$

$$C_R: z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_R := \Gamma_R + C_R.$$



# 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

## 証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

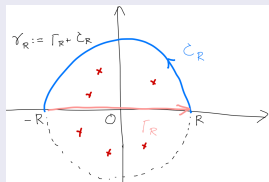
$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど...})$$

複素平面内の曲線  $\Gamma_R$ ,  $C_R$ ,  $\gamma_R$  を次式で定める。

$$\Gamma_R: z = x \quad (x \in [-R, R]),$$

$$C_R: z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

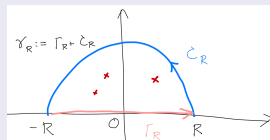
$$\gamma_R := \Gamma_R + C_R.$$



$R \geq R^*$  を満たす任意の  $R$  に対して、 $P$  の零点は  $|z| < R$  に含まれる。  $\text{Im } c > 0$  を満たす零点  $c$  は  $\gamma_R$  の内部に含まれる。

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

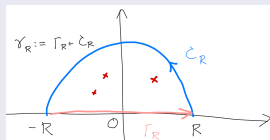
### 証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

## 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

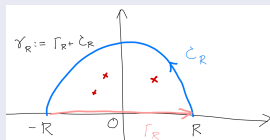


$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

# 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

## 証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

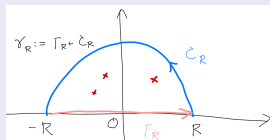
$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

一方、留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

# 13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

## 証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{\zeta_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\zeta_R} f(z) dz.$$

$$\left| \int_{\zeta_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\zeta_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{\zeta_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

一方、留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

ゆえに

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\zeta_R} f(z) dz \rightarrow 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) \quad (R \rightarrow +\infty). \quad \square$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

$f$  を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

$f$  を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、共役 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \quad \tilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

$f$  を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、共役 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \quad \tilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

念のため:

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \overline{e^{iax}} = e^{-iax}, \quad \cos(ax) = \operatorname{Re} e^{iax}, \quad \sin(ax) = \operatorname{Im} e^{iax}, \quad |e^{iax}| = 1$$

を思い出しておこう。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 定理 26.1 (有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ , ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )  
 $P(x) \neq 0$ ,  $a > 0$  とするとき、

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

ここで  $\sum_{\text{Im } c > 0}$  は、 $f$  の極 (あるいは  $f(z)e^{iaz}$  の極と言っても同じこと)  $c$  のうち、 $\text{Im } c > 0$  を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 定理 26.1 (有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ ,  $(\forall x \in \mathbb{R})$   
 $P(x) \neq 0$ ,  $a > 0$  とするとき、

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

ここで  $\sum_{\text{Im } c > 0}$  は、 $f$  の極 (あるいは  $f(z)e^{iaz}$  の極と言っても同じこと)  $c$  のうち、 $\text{Im } c > 0$  を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

### 証明

定理 25.5 の証明と同様にして、ある定数  $M, R^*(\geq 1)$  が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|}.$$

(つづく)

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

任意の  $A, B > \mathbb{R}^*$  に対して、曲線  $C_{\text{下}}, C_{\text{右}}, C_{\text{上}}, C_{\text{左}}, C_{AB}$  を次のように定める。

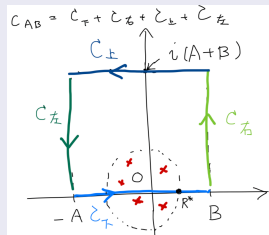
$$C_{\text{下}}: z = x \quad (x \in [-A, B]),$$

$$C_{\text{右}}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),$$

$$C_{\text{上}}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),$$

$$C_{\text{左}}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),$$

$$C_{AB} := C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.$$



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

任意の  $A, B > R^*$  に対して、曲線  $C_{\text{下}}, C_{\text{右}}, C_{\text{上}}, C_{\text{左}}, C_{AB}$  を次のように定める。

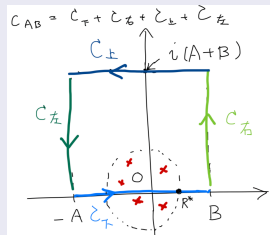
$$C_{\text{下}}: z = x \quad (x \in [-A, B]),$$

$$C_{\text{右}}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),$$

$$C_{\text{上}}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),$$

$$C_{\text{左}}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),$$

$$C_{AB} := C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.$$



$P$  の零点はすべて  $|z| < R^*$  に含まれ、上半平面に属するものは  $C_{AB}$  の内部にある (実軸上にはないので  $C_{AB}$  上にもない)。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

任意の  $A, B > R^*$  に対して、曲線  $C_{\text{下}}, C_{\text{右}}, C_{\text{上}}, C_{\text{左}}, C_{AB}$  を次のように定める。

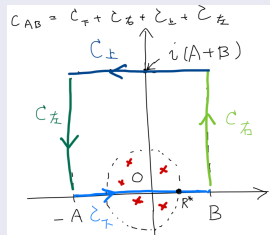
$$C_{\text{下}}: z = x \quad (x \in [-A, B]),$$

$$C_{\text{右}}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),$$

$$C_{\text{上}}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),$$

$$C_{\text{左}}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),$$

$$C_{AB} := C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.$$



$P$  の零点はすべて  $|z| < R^*$  に含まれ、上半平面に属するものは  $C_{AB}$  の内部にある (実軸上にはないので  $C_{AB}$  上にもない)。ゆえに留数定理によって

$$\int_{C_{AB}} f(z)e^{iax} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(つづく)

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

$C_{\Gamma}$  に沿う積分は ( $z = x$  ( $x \in [-A, B]$ )) がパラメーター付けなので)

$$\int_{C_{\Gamma}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$  に沿う積分は ( $z = x$  ( $x \in [-A, B]$ ) がパラメーター付けなので)

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

$C_{\text{右}}$  で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B + iy)] = -ay, \quad \left| e^{iaz} \right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$  に沿う積分は ( $z = x$  ( $x \in [-A, B]$ )) がパラメーター付けなので

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

$C_{\text{右}}$  で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B + iy)] = -ay, \quad \left| e^{iaz} \right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから

$$\left| \int_{C_{\text{右}}} f(z)e^{iaz} \right| \leq \frac{M}{B} \int_0^{A+B} e^{-ay} dy \leq \frac{M}{B} \int_0^{\infty} e^{-ay} dy = \frac{M}{aB}.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$  に沿う積分は ( $z = x$  ( $x \in [-A, B]$ )) がパラメーター付けなので

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

$C_{\text{右}}$  で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B + iy)] = -ay, \quad \left| e^{iaz} \right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから

$$\left| \int_{C_{\text{右}}} f(z)e^{iaz} \right| \leq \frac{M}{B} \int_0^{A+B} e^{-ay} dy \leq \frac{M}{B} \int_0^{\infty} e^{-ay} dy = \frac{M}{aB}.$$

$C_{\text{左}}$  もほぼ同様にして

$$\left| \int_{C_{\text{左}}} f(z)e^{iaz} \right| \leq \frac{M}{aA}.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

$C_{\pm}$  では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(-x + i(A+B))] = -a(A+B), \quad |e^{iaz}| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left| \int_{C_{\pm}} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq \frac{M}{A+B} \int_{-A}^B e^{-a(A+B)} dx = Me^{-a(A+B)}.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 証明 (つづき)

$C_{\pm}$  では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(-x + i(A+B))] = -a(A+B), \quad |e^{iaz}| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left| \int_{C_{\pm}} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq \frac{M}{A+B} \int_{-A}^B e^{-a(A+B)} dx = Me^{-a(A+B)}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \left( \int_{C_{AB}} - \int_{C_{右}} - \int_{C_{上}} - \int_{C_{左}} \right) \\ &= \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \left( 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) - \int_{C_{右}} - \int_{C_{左}} - \int_{C_{上}} \right) \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c). \quad (\text{注: 広義積分の収束も同時に証明できている}) \quad \square \end{aligned}$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の注意は細かいので、講義では軽く触れるにとどめる。

### 注意 26.2 (定理 26.1 の仮定と証明法について)

仮定  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$  は、定理 25.5 の条件 ( $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ ) より弱い。

強い条件  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$  を仮定した場合は (そういうテキストが少なくない)、 $a \geq 0$  に対して (つまり  $a = 0$  も OK になる) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、定理 25.5 の証明で用いた簡単な  $\gamma_R = \Gamma_R + C_R$  が採用できる。また

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ( $0 < e^{-aR \sin \theta} \leq 1$  より  $0 < \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \pi$  が導かれる)。

Cf.  $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$  は発散、 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  は絶対収束、 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  は条件収束 (絶対収束しない)。

□

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、 $a \leq 0$  のときは、(1) が成立しないことが分かる。 $a < 0$  の場合は、代わりに次が成り立つ。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、 $a \leq 0$  のときは、(1) が成立しないことが分かる。 $a < 0$  の場合は、代わりに次が成り立つ。

### 系 26.3 ( $a < 0$ の場合の公式)

$$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z], f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1, (\forall x \in \mathbb{R})$$

$P(x) \neq 0, a < 0$  とするとき、

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } c < 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、 $a \leq 0$  のときは、(1) が成立しないことが分かる。 $a < 0$  の場合は、代わりに次が成り立つ。

### 系 26.3 ( $a < 0$ の場合の公式)

$$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z], f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1, (\forall x \in \mathbb{R})$$

$P(x) \neq 0, a < 0$  とするとき、

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } c < 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

しかし、系 26.3 を使うのでなく、計算の工夫により、定理 26.1 に帰着できる例を説明するテキストが多い。これについては、以下の例を見よ。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$  の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$  の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$  のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$ 、 $-a > 0$  に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e^{-iax}}}{x^2 + 1} dx$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$  の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$  のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$ 、 $-a > 0$  に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx}$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$  の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$  のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$ 、 $-a > 0$  に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx} = \overline{2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}; i \right)}$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$  の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$  のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$ 、 $-a > 0$  に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = \overline{2\pi i \cdot \frac{e^{-iaz}}{2z} \Big|_{z=i}}$$



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$  の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$  の場合は、定理 25.5 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$  のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$ 、 $-a > 0$  に注意して、定理 26.1 から

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx} = \overline{2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}; i \right)} = \overline{2\pi i \cdot \frac{e^{-iaz}}{2z} \Big|_{z=i}} \\ &= \overline{\pi e^a} = \pi e^a. \end{aligned}$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、(3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.4 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、(3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。



### 余談 1 (Mathematica で検算するときに)

Mathematica で計算する際に、 $a$  の符号を教えるには、例えば

```
Assuming[a>0, Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]
```

のようにすれば良い。



## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.5

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.5

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、 $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$  であることから

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.5

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、 $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$  であることから

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

$P(z) := z^2 + 1$ ,  $Q(z) := z$ ,  $a := 1$  とすると、定理 26.1 の条件が成り立つ。

## 13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分

### 例 26.5

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、 $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$  であることから

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

$P(z) := z^2 + 1$ ,  $Q(z) := z$ ,  $a := 1$  とすると、定理 26.1 の条件が成り立つ。ゆえに

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{z}{z^2 + 1} e^{iz}; i \right) \right) = \operatorname{Im} \left( \pi i \cdot \frac{ze^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \pi i e^{i^2} \right) = \frac{\pi}{2e}. \quad \square$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$



## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

(解答)  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ 。

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

(解答)  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ . また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

(解答)  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ 。また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

(解答)  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ 。また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2 + 1)} dz \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)} \end{aligned}$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

(解答)  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ 。また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2 + 1)} dz \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)} \\ &= i \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \text{Res} \left( \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; c \right) = -2\pi \text{Res} \left( \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

### 例 26.6

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

(解答)  $z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ 。また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2 + 1)} dz \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)} \\ &= i \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; c \right) = -2\pi \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; \frac{1}{2} \right) \\ &= -2\pi \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left( z - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)} = -2\pi \frac{1}{2(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} \text{ があっても OK.}$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$  があっても OK.

### 例 26.7

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$



## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$  があっても OK.

### 例 26.7

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ . また

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

であるから

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} \text{ があっても OK.}$$

### 例 26.7

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ . また

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2i}(z - 1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} \\ &= 2 \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 6iz - 1}; c \right) = 4\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 6iz + 1}; (-3 + 2\sqrt{2})i \right) \\ &= 4\pi i \lim_{z \rightarrow (-3+2\sqrt{2})i} \frac{1}{z - (-3 - 2\sqrt{2})i} = 4\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} \text{ があっても OK.}$$

### 例 26.7

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ . また

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2i}(z - 1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} \\ &= 2 \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 6iz - 1}; c \right) = 4\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 6iz + 1}; (-3 + 2\sqrt{2})i \right) \\ &= 4\pi i \lim_{z \rightarrow (-3 + 2\sqrt{2})i} \frac{1}{z - (-3 - 2\sqrt{2})i} = 4\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

結局  $\cos \theta, \sin \theta$  の有理式の  $[0, 2\pi]$  における積分は、このやり方で計算できることが分かる。

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

### 定理 26.8 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x, y)$  を  $x, y$  の有理式とするとき、

$$(4a) \quad \int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}(f; c).$$

ただし  $f$  は

$$(4b) \quad f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、 $f(z)$  は単位円周  $|z|=1$  上に極を持たないとする。また  $\sum_{|c|<1}$  は、 $f$  の極  $c$  のうち、単位円盤内  $|z|<1$  に属するものすべてについての和を意味する。

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

### 定理 26.8 (三角関数の有理関数の周期積分)

$f(x, y)$  を  $x, y$  の有理式とするとき、

$$(4a) \quad \int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}(f; c).$$

ただし  $f$  は

$$(4b) \quad f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、 $f(z)$  は単位円周  $|z|=1$  上に極を持たないとする。また  $\sum_{|c|<1}$  は、 $f$  の極  $c$  のうち、単位円盤内  $|z|<1$  に属するものすべてについての和を意味する。

注意:  $\cos \theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $\sin \theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$  であるが、そう変形してしまうと、 $z$  の正則関数ではないので、留数定理が使えなくなる。 **$\bar{z}$  でなくて、 $z^{-1}$  を使うのがポイント。**

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

### 例 26.9

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、これは  $|z| = 1$  のパラメータ表示であり、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

また  $dz = ie^{i\theta} d\theta$  より、 $d\theta = \frac{dz}{iz}$ . ゆえに  $(\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$  に注意して)

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2iz + i(z^2 + 1)/2 + (z^2 - 1)/2} \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{(i+1)z^2 + 4iz + (i-1)} = (1-i) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2(1+i)z + i}. \end{aligned}$$

ここからどうするか。閉曲線に沿う線積分だから、留数定理の利用を考える。特異点を探せ。それは分母の零点だ。それを求めよう。それから閉曲線の中に入っているものを探す。そして留数を計算する。図を描いて考える。 (つづく)

## 13.3 三角関数の有理関数の周期積分

### 例 26.9 (つづき)

$z^2 + 2(1+i)z + i = 0$  の根は

$$\begin{aligned} z &= -(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - i} = -(1+i) \pm \sqrt{i} = -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ &= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

前者を  $\alpha$ , 後者を  $\beta$  とすると、このうち  $|z| < 1$  にあるのは  $\beta$ .

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 2(1+i)z + i}; \beta \right) = \lim_{z \rightarrow \beta} \left( (z - \beta) \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta} = (1-i) \cdot 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} = \sqrt{2}\pi. \quad \square$$

定積分計算の話題に詳しいテキストとして、一松 [2] をあげておく。色々面白い例が載っている。

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).
- [2] ひとつまっしん 一松 信：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算，共立出版 (1979)，第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。