複素関数・同演習 第25回

～留数定理～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年12月22日

目次

本日の内容・連絡事項

- 留数の計算法について必要なことは解説済みである。記憶整理用用のスライドを 1 枚用意した。
- 前回留数の計算法を色々述べたが、例を 1 つ追加しておく。
- (簡単な形の) 留数定理を述べ、それを知ると色々と見通しが良くなることを説明し、定理を証明する。
- より一般の形の留数定理の紹介をする。ここはスルーしても良い (いわゆるテストには出ない、というやつ)。
- 次回に時間的余裕を作りたいので、留数を用いた定積分計算の定理と例を述べる (証明は次回)。
- 宿題 12 を出してあります。
- 第 24 回授業で宿題 11(1)(b) を説明し損ねたので、それを説明します。

復習用: 留数の計算

- 定理 A 「c が f の k 位の極 $\Leftrightarrow$ c のある近傍 U と、U で正則な g が存在して、$f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z\in U\setminus\{c\})$, $g(c)\neq 0$ が成り立つ。」
- 定理 B 「c が f の k 位の零点 $\Leftrightarrow$ c のある近傍 U と、U で正則な g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$, $g(c)\neq 0$ が成り立つ。」
- 定理 C 「P と Q が c のある近傍 U で正則であり、c が P の k 位の零点で、$Q(c)\neq 0$ であれば、c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の k 位の極である。」

  条件 $Q(c)\neq 0$ を省くと、結論は「c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の**高々** k 位の極である。」となる。
- 定理 D 「c が f の高々 k 位の極ならば

  $$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].」$$
- 定理 E 「P と Q が c のある近傍で正則で、c が P の 1 位の零点ならば、(c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の高々1 位の極であり) $\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{Q(c)}{P'(c)}$.」
- 定理 F 「c が φ の 1 位の極、ψ が c のある近傍で正則ならば、c は $f:=\varphi\psi$ の高々 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;c)=\mathrm{Res}(\varphi;c)\psi(c)$.」

PDF で 定理 X のところをクリックするとリンク先に飛びます。

11.2.2 極の場合の留数の計算 (続き)

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草))

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)$$

$\tan z$ の $z=0$ の周りの Taylor 展開を数項だけでも求めてみる (講義ノート [1] の §7.3 命題 7.15 には、Bernoulli 数を用いて一般項を表す公式が載っている。)。

11.2.2 極の場合の留数の計算 (続き)

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草))

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)$$

$\tan z$ の $z=0$ の周りの Taylor 展開を数項だけでも求めてみる (講義ノート [1] の §7.3 命題 7.15 には、Bernoulli 数を用いて一般項を表す公式が載っている。)。

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}=z\frac{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}.$$

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草))

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)$$

$\tan z$ の $z=0$ の周りの Taylor 展開を数項だけでも求めてみる (講義ノート [1] の §7.3 命題 7.15 には、Bernoulli 数を用いて一般項を表す公式が載っている。)。

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}=z\frac{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}.$$

両辺を z で割り、$w=z^2$ とおくと、$\dfrac{\tan z}{z}=\dfrac{1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots}{1-\frac{1}{2!}w+\frac{1}{4!}w^2-\cdots}.$

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草))

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)$$

$\tan z$ の $z=0$ の周りの Taylor 展開を数項だけでも求めてみる (講義ノート [1] の §7.3 命題 7.15 には、Bernoulli 数を用いて一般項を表す公式が載っている。)。

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}=z\frac{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}.$$

両辺を z で割り、$w=z^2$ とおくと、$\dfrac{\tan z}{z}=\dfrac{1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots}{1-\frac{1}{2!}w+\frac{1}{4!}w^2-\cdots}$.

これは w の関数として、0 の近傍で正則である (分母と分子は収束冪級数で、分母は 0 にならない)。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$ と書けるはず。分母を払って

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n\right)\left(1-\frac{1}{2!}w+\frac{1}{4!}w^2-\cdots\right)=1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots.$$

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草) つづき)

左辺を展開して、両辺の係数を比較すると

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 - \frac{a_0}{2} &= -\frac{1}{6},\\
a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{24} &= \frac{1}{120}, \cdots
\end{aligned}
$$

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草) つづき)

左辺を展開して、両辺の係数を比較すると

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 - \frac{a_0}{2} = -\frac{1}{6},$$
$$a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{24} = \frac{1}{120}, \cdots$$

上から順に解くことができて

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{15}, \quad \cdots$$

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草) つづき)

左辺を展開して、両辺の係数を比較すると

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 - \frac{a_0}{2} = -\frac{1}{6},$$
$$a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{24} = \frac{1}{120}, \cdots$$

上から順に解くことができて

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{15}, \quad \cdots$$

ゆえに

$$\tan z = z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2}{15}z^4 + \cdots\right),$$

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草) つづき)

左辺を展開して、両辺の係数を比較すると

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 - \frac{a_0}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{24} = \frac{1}{120}, \cdots$$

上から順に解くことができて

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{15}, \quad \cdots$$

ゆえに

$$\tan z = z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2}{15}z^4 + \cdots\right), \quad \frac{\tan z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{15}z + \cdots.$$

11.2.2 極の場合の留数の計算

例 25.1 (冪級数の割り算を使う例 (時間の埋め草) つづき)

左辺を展開して、両辺の係数を比較すると

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 - \frac{a_0}{2} = -\frac{1}{6},$$
$$a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{24} = \frac{1}{120}, \cdots$$

上から順に解くことができて

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{15}, \quad \cdots$$

ゆえに

$$\tan z = z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2}{15}z^4 + \cdots\right), \quad \frac{\tan z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{15}z + \cdots.$$

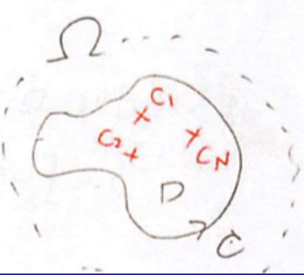
ゆえに

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4}; 0\right) = \frac{1}{3}. \quad \square$$

定理 25.2 (留数定理, the residue theorem)

D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域とみなしたとき Green の定理が成立するとする (例えば、区分的に C^1 級の関数のグラフで挟まれた縦線領域)。$C := \partial D$ (進行方向の左手に D を見る向き) とおく。Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$\overline{D} \subset \Omega$ を満たす。$\{c_j\}_{j=1}^N$ は D 内の相異なる点で、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき次式が成り立つ。

(1) $$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f; c_j).$$



11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} =$$

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right)$$

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right) = 2\pi i.$$

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right) = 2\pi i.$$

また、Cauchy の積分公式も (a は $\dfrac{f(z)}{z-a}$ の高々1 位の極だから)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz =$$

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right) = 2\pi i.$$

また、Cauchy の積分公式も (a は $\dfrac{f(z)}{z-a}$ の高々1 位の極だから)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-a}; a\right) =$$

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right) = 2\pi i.$$

また、Cauchy の積分公式も (a は $\dfrac{f(z)}{z-a}$ の高々1 位の極だから)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-a}; a\right) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

11.1.2 留数定理は万能包丁

この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た線積分の計算のうち、閉曲線に沿うものの値は、大抵これで分かる。

例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad \Rightarrow \quad \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-a}; a\right) = 2\pi i.$$

また、Cauchy の積分公式も (a は $\dfrac{f(z)}{z-a}$ の高々1 位の極だから)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-a}; a\right) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

もちろん、

これらの等式の証明に留数定理を用いるのは、循環論法になってしまい反則

であるが、分かりやすいであろう。

例 25.3

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z+2)}$　(b) $\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z(z-2)}$　(c) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-2)}$　(C は $z = \cos\theta + 2i\sin\theta$ $(\theta \in [0, 2\pi])$)

例 25.3

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z+2)}$ (b) $\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z(z-2)}$ (c) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-2)}$ (C は $z = \cos\theta + 2i\sin\theta$ $(\theta \in [0, 2\pi])$)

これは Cauchy の積分公式を用いて計算できる (答えはそれぞれ $\frac{\pi i}{2}$, $-\pi i$, $-\pi i$)。いずれも留数の計算に帰着できる。それをやってみよう。

例 25.3

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)}$ (b) $\displaystyle\int_{|z-i|=2}\frac{dz}{z(z-2)}$ (c) $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z(z-2)}$ (C は $z=\cos\theta+2i\sin\theta$ $(\theta\in[0,2\pi])$)

これは Cauchy の積分公式を用いて計算できる (答えはそれぞれ $\frac{\pi i}{2}$, $-\pi i$, $-\pi i$)。いずれも留数の計算に帰着できる。それをやってみよう。

さらに、Cauchy の積分公式では計算できない $\displaystyle\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^3}$ なども計算できるようになる。

$$\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^3}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(z+2)^3};-2\right)$$

$$=$$

$$=$$

例 25.3

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z+2)}$ (b) $\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z(z-2)}$ (c) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-2)}$ (C は $z = \cos\theta + 2i\sin\theta$ ($\theta \in [0, 2\pi]$))

これは Cauchy の積分公式を用いて計算できる (答えはそれぞれ $\frac{\pi i}{2}$, $-\pi i$, $-\pi i$)。いずれも留数の計算に帰着できる。それをやってみよう。

さらに、Cauchy の積分公式では計算できない $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z+2)^3}$ なども計算できるようになる。

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{z^2(z+2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z+2)^3}; -2\right)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z\to -2} \left((z+2)^3 \frac{1}{z^2(z+2)^3}\right)'' = \pi i \left.\frac{(-2)(-3)}{z^4}\right|_{z=-2}$$

$$=$$

例 25.3

(a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)}$ (b) $\displaystyle\int_{|z-i|=2}\frac{dz}{z(z-2)}$ (c) $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z(z-2)}$ (C は $z=\cos\theta+2i\sin\theta$ $(\theta\in[0,2\pi])$)

これは Cauchy の積分公式を用いて計算できる (答えはそれぞれ $\frac{\pi i}{2}$, $-\pi i$, $-\pi i$)。いずれも留数の計算に帰着できる。それをやってみよう。

さらに、Cauchy の積分公式では計算できない $\displaystyle\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^3}$ なども計算できるようになる。

$$\begin{aligned}\int_{|z+2|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^3}&=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z+2)^3};-2\right)\\&=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to-2}\left((z+2)^3\frac{1}{z^2(z+2)^3}\right)''=\pi i\left.\frac{(-2)(-3)}{z^4}\right|_{z=-2}\\&=\frac{6\pi i}{(-2)^4}=\frac{3\pi i}{8}.\end{aligned}$$

例 25.4 (Goursat の公式を留数定理で解釈してみる)

既に紹介した公式 **Goursat の公式**: $n \in \mathbb{N}$ とするとき

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = f^{(n)}(a). \tag{2}$$

例 25.4 (Goursat の公式を留数定理で解釈してみる)

既に紹介した公式 **Goursat の公式**: $n \in \mathbb{N}$ とするとき

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a). \tag{2}$$

この公式そのものが留数定理を使って証明できる。実際

例 25.4 (Goursat の公式を留数定理で解釈してみる)

既に紹介した公式 **Goursat の公式**: $n \in \mathbb{N}$ とするとき

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a). \tag{2}$$

この公式そのものが留数定理を使って証明できる。実際

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{n!}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}; a\right) \\
&= n! \cdot \frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[(z-a)^{n+1}\cdot\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right] \\
&= \lim_{z\to a} f^{(n)}(z) = f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

例 25.4 (Goursat の公式を留数定理で解釈してみる)

既に紹介した公式 **Goursat の公式**: $n \in \mathbb{N}$ とするとき

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a). \tag{2}$$

この公式そのものが留数定理を使って証明できる。実際

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{n!}{2\pi i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}; a\right)\\
&= n!\cdot\frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-a)^{n+1}\cdot\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right]\\
&= \lim_{z\to a} f^{(n)}(z) = f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

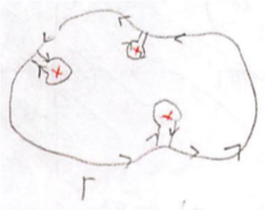
(そういうわけで、Goursat の公式 (2) を覚えなくてもあまり困らない、というのが私の意見です。もっとも、Goursat の公式は、Cauchy の積分公式を a について微分しただけだから、覚えるのは難しくないかもしれないけれど。) □

11.1.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。

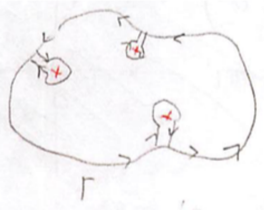
11.1.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



11.1.3 留数定理の直観的な証明

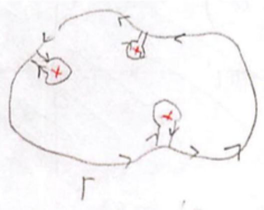
多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

11.1.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



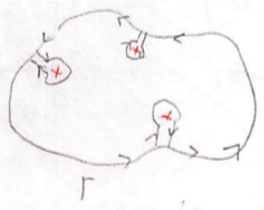
Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

11.1.3 留数定理の直観的な証明

多くの本に次のストーリーの留数定理の証明が載っている。Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に×はないので $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

一般に往復するとキャンセルするので、$\displaystyle\int_{\text{往復通路の和}} f(z)\,dz = 0.$ ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

11.1.3 直観的な証明 (つづき)

これから

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f; c_j).$$

(最後の等号 $=$ は、Laurent 展開の係数についての公式で、$n = -1$ の場合を用いた。)

11.1.3 直観的な証明 (つづき)

これから

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f; c_j).$$

(最後の等号 $=$ は、Laurent 展開の係数についての公式で、$n=-1$ の場合を用いた。)

　しかし、曲線 C が複雑だったり、N が大きい場合に、この証明は通用するだろうか？実は私は厳密な証明が書ける自信がない (読んだこともない)。以下ではこれとは違うやり方をする。

11.1.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j; 2\varepsilon) \subset \Omega$ かつ $D(c_j; 2\varepsilon)$ 内に c_k $(k \neq j)$ は含まれない。

11.1.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad(0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

11.1.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad(0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

この主部 $f_j(z):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ で正則である。

11.1.4 留数定理の証明

証明

十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

各 j に対して、f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad (0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

この主部 $f_j(z):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ で正則である。

$$g(z):=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)\quad (z\in\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\})$$

とおくと g は $\Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\}$ で正則である。さらに任意の j に対して、c_j は g の除去可能特異点である。

(続く)

11.1.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

11.1.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz$$

11.1.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z) = \left(f(z) - f_j(z)\right) - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z-c_j)^n - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

証明 (つづき)

(実際

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z) = \left(f(z) - f_j(z)\right) - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z-c_j)^n - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$\int_C f_j(z)\,dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz = a_{-1}^{(j)}\int_C \frac{dz}{z-c_j}.$$

11.1.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

(実際

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{N}f_k(z)=\left(f(z)-f_j(z)\right)-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(z-c_j)^n-\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$$

が成り立ち、右辺第 1 項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}}f_k(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。)

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0=\int_C g(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz-\sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$\int_C f_j(z)\,dz=\int_C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz=a_{-1}^{(j)}\int_C\frac{dz}{z-c_j}.$$

($=$ について: $n\ne 1$ のとき、$\dfrac{1}{(z-c_j)^n}$ は原始関数を持つので、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。)

(つづく)

11.1.4 留数定理の証明 (つづき)

証明 (つづき)

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)} \int_C \frac{dz}{z-c_j} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j) \int_C \frac{dz}{z-c_j}.$$

各 j につき、$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-c_j}$ の積分路 C を、$|z-c_j|=\varepsilon$ で置き換えられるのを認めれば、値は $2\pi i$ であるから、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j). \quad \square$$

(以上を振り返ると、良くある積分路を変形を用いる証明に対して、被積分関数の変形を用いる証明である、と短くまとめられるだろう。)

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

(この 11.1.5 はスルーしても構いません。)

この講義では、素性の良い領域 D の境界 $C = \partial D$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$ に限定して留数定理を述べたが (定理 25.2)、閉曲線 (鎖) の (点の周りの) 回転数と呼ばれる概念を導入して、より一般的な留数定理が得られる。簡単に紹介しておく。

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

(この 11.1.5 はスルーしても構いません。)

この講義では、素性の良い領域 D の境界 $C=\partial D$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$ に限定して留数定理を述べたが (定理 25.2)、閉曲線 (鎖) の (点の周りの) 回転数と呼ばれる概念を導入して、より一般的な留数定理が得られる。簡単に紹介しておく。

$\mathbb{C}$ 内の有限個の曲線 $C_1,\cdots,C_n$ の形式和 $C:=C_1+\cdots+C_n$ を**チェイン** (曲線鎖) と呼ぶ。特に各 C_j が閉曲線であるとき、C を**サイクル**と呼ぶ。$C^*:=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n}C_j^*$ とおき、C の像 (跡) と呼ぶ。

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

(この 11.1.5 はスルーしても構いません。)

この講義では、素性の良い領域 D の境界 $C=\partial D$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$ に限定して留数定理を述べたが (定理 25.2)、閉曲線 (鎖) の (点の周りの) 回転数と呼ばれる概念を導入して、より一般的な留数定理が得られる。簡単に紹介しておく。

$\mathbb{C}$ 内の有限個の曲線 $C_1,\cdots,C_n$ の形式和 $C:=C_1+\cdots+C_n$ を**チェイン** (曲線鎖) と呼ぶ。特に各 C_j が閉曲線であるとき、C を**サイクル**と呼ぶ。$C^*:=\displaystyle\bigcup_{j=1}^n C_j^*$ とおき、C の像 (跡) と呼ぶ。

区分的 C^1 級のサイクル C と、$a\in\mathbb{C}\setminus C^*$ に対して、線積分

(3)
$$n(C;a):=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-a}$$

は、C に関する a の**指数** (the index of a with respect to C)、あるいは a の周りの C の**回転数** (the winding number of C around a) と呼ばれる。

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

(この 11.1.5 はスルーしても構いません。)

この講義では、素性の良い領域 D の境界 $C = \partial D$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$ に限定して留数定理を述べたが (定理 25.2)、閉曲線 (鎖) の (点の周りの) 回転数と呼ばれる概念を導入して、より一般的な留数定理が得られる。簡単に紹介しておく。

$\mathbb{C}$ 内の有限個の曲線 $C_1, \cdots, C_n$ の形式和 $C := C_1 + \cdots + C_n$ を**チェイン** (曲線鎖) と呼ぶ。特に各 C_j が閉曲線であるとき、C を**サイクル**と呼ぶ。$C^* := \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} C_j^*$ とおき、C の像 (跡) と呼ぶ。

区分的 C^1 級のサイクル C と、$a \in \mathbb{C} \setminus C^*$ に対して、線積分

$$n(C; a) := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-a} \tag{3}$$

は、C に関する a の**指数** (the index of a with respect to C)、あるいは a の周りの C の**回転数** (the winding number of C around a) と呼ばれる。

$n(C; a)$ は直観的には、C が a の周りをどの向きに何回 回(まわ)っているかを表す数で、実際、必ず整数であることが (割と簡単に) 証明できる。

(つづく)

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

C が、開集合 Ω について **0 にホモローグ** (homologous to zero) とは、

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega) \quad n(C; a) = 0$$

が成り立つことをいう (C は、Ω の補集合の任意の点を回らない… “囲まない”)。

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

C が、開集合 Ω について **0 にホモローグ** (homologous to zero) とは、

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega) \quad n(C; a) = 0$$

が成り立つことをいう (C は、Ω の補集合の任意の点を回らない… “囲まない”)。

Cauchy の積分定理　$\mathbb{C}$ の領域 Ω 内の区分的 C^1 級のサイクル C が、Ω について 0 にホモローグであり、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則ならば $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

C が、開集合 Ω について **0 にホモローグ** (homologous to zero) とは、

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega) \quad n(C; a) = 0$$

が成り立つことをいう (C は、Ω の補集合の任意の点を回らない… “囲まない”)。

Cauchy の積分定理　$\mathbb{C}$ の領域 Ω 内の区分的 C^1 級のサイクル C が、Ω について 0 にホモローグであり、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則ならば $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$

(以前説明した Cauchy の積分定理では、領域 Ω について星型とか単連結のような条件を課して、その代わりに C については (閉曲線という以外は) 無条件であった。ここでは Ω については (領域という以外は) 無条件で、その代わりに C について Ω で 0 にホモローグという条件を課している。)

11.1.5 余談: 回転数を用いた一般化

C が、開集合 Ω について **0 にホモローグ** (homologous to zero) とは、

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega) \quad n(C; a) = 0$$

が成り立つことをいう (C は、Ω の補集合の任意の点を回らない… “囲まない”)。

Cauchy の積分定理 $\mathbb{C}$ の領域 Ω 内の区分的 C^1 級のサイクル C が、Ω について 0 にホモローグであり、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則ならば $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$

(以前説明した Cauchy の積分定理では、領域 Ω について星型とか単連結のような条件を課して、その代わりに C については (閉曲線という以外は) 無条件であった。ここでは Ω については (領域という以外は) 無条件で、その代わりに C について Ω で 0 にホモローグという条件を課している。)

一般化された留数定理 C は $\mathbb{C}$ の領域 Ω 内の区分的 C^1 級のサイクルであり、Ω について 0 にホモローグであるとするとき

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} n(C; c_j)\,\mathrm{Res}(f; c_j).$$

詳しいことは、例えば杉浦 [2], 高橋 [3] を見よ。

13 定積分計算への留数の応用

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、(主に実関数の) 定積分の計算を、なるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったそうであるが、そうして創られた理論は、定積分計算という当初の目的を大きく超えて発展することになった。

13 定積分計算への留数の応用

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、(主に実関数の) 定積分の計算を、なるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったそうであるが、そうして創られた理論は、定積分計算という当初の目的を大きく超えて発展することになった。

一方でこの §13 で説明するような (留数計算に基づく) 定積分の計算法は、使いこなすために関数論の堅実な理解が必要で、自己の知識に不十分なところがないかのチェックのための良い演習問題 (センセーにとっては試験問題) を提供してくれる。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

記号の約束

$$\mathbb{C}[z] := z \text{ の複素係数多項式全体}.$$

$P(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して

$$\deg P(z) := P(z) \text{ の次数}$$

とする。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

記号の約束

$$\mathbb{C}[z] := z \text{ の複素係数多項式全体}.$$

$P(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して

$$\deg P(z) := P(z) \text{ の次数}$$

とする。

定理 25.5 (有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z],\ f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)},\ \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2,\ (\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x) \neq 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}(f; c).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, c>0}$ は、f の極 c のうち、$\mathrm{Im}\, c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$

上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$

   上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

2. 微積分で、有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まることを学んだ (はずである)。だから上の定理を使わなくても、積分は原理的には計算出来るが、上の定理を使う方がずっと見通しが良い。

13.1 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分

注意事項を 3 つ。

1. このように $\mathbb{R}$ 全体での積分が頻出する。これらはいわゆる広義積分で
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx.$$
上の定理の場合は (証明をみれば分かるように) 絶対収束するので
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$
2. 微積分で、有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まることを学んだ (はずである)。だから上の定理を使わなくても、積分は原理的には計算出来るが、上の定理を使う方がずっと見通しが良い。
3. 下半平面にある留数の和を取るとどうなるか？実は値が -1 倍になる。つまり
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c<0} \operatorname{Res}(f;c).$$
(実は $\sum_{c} \operatorname{Res}(f;c) = 0$ が成り立つ。)

例 25.6

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

例 25.6

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z) := z^4 + 1$, $Q(z) := 1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、

例 25.6

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z) := z^4 + 1$, $Q(z) := 1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z) = 4$, $\deg Q(z) = 0$ であるから、$\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$,

例 25.6

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1,\ Q(z):=1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4,\ \deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\ge \deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\ge 0+1=1$ であるから $P(x)\ne 0$.

例 25.6

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、
$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\geq \deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\geq 0+1=1$ であるから $P(x)\neq 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c)=0 \Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k=0,1,2,3)$ $\Leftrightarrow c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

例 25.6

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\ge 0+1=1$ であるから $P(x)\ne 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c)=0\Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k=0,1,2,3)\Leftrightarrow c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

例 25.6

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\geq\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\geq 0+1=1$ であるから $P(x)\neq 0$.

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c)=0\Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}$ $(k=0,1,2,3)\Leftrightarrow c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

定理 25.5 から、

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_2\right)\right)$$

例 25.6

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$P(z):=z^4+1$, $Q(z):=1$ とおくと、定理 25.5 の条件が成り立つ。実際、$\deg P(z)=4$, $\deg Q(z)=0$ であるから、$\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $P(x)=x^4+1\ge 0+1=1$ であるから $P(x)\ne 0$.

$$c \text{ が } \frac{Q}{P} \text{ の極} \Leftrightarrow P(c)=0 \Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}\ (k=0,1,2,3) \Leftrightarrow c=\tfrac{1+i}{\sqrt{2}},\tfrac{1-i}{\sqrt{2}},\tfrac{-1+i}{\sqrt{2}},\tfrac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

定理 25.5 から、

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_2\right)\right)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(c_1+c_2)=-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), 丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844 でアクセスできる.

[3] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された. 丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる.