複素関数・同演習 第22回

～一致の定理 (2), Laurent 展開～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年12月14日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回紹介した一致の定理 (定理 21.9) の証明を解説する。
- 宿題 10 の解説を行う。
- 円環領域で正則な関数は **Laurent 展開**できる、という定理を紹介し、簡単な例を説明する。その定理を用いて**孤立特異点の留数**が定義できる (次回授業)。それ以降、「複素関数」の最後まで、**留数定理**とその応用が話題の中心となる。講義ノート [1] の§10.1 の内容である。
- 宿題 11 を出します (締め切りは 12 月 21 日 13:30)。
- 期末試験を実施するか期末レポートかについて。

9.2 一致の定理 (復習)

次の定理は前回既に紹介してある。

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D \to \mathbb{C}$ と $g\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f = g$.
(定義域のごく一部で一致することから全体で一致することが導かれる。)

次の定理は前回既に紹介してある。

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D\to\mathbb{C}$ と $g\colon D\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $z_n\in D$ かつ $z_n\neq c$ かつ $f(z_n)=g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f=g$.
(定義域のごく一部で一致することから全体で一致することが導かれる。)

以下で紹介する証明は 2 つのステップからなる。

後半はトポロジーの予備知識があれば、見通しが良く、長くは感じないだろうが、初めてだと理解するのは大変かもしれない (こういうのは複数回ふれる必要があると思う)。

一応全部説明するが、前半 (Step 1) を理解することを目標としよう。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えれば、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えれば、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)$ $\overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\ge 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えれば、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)$ $\overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n=0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、$a_n\neq 0$ であるような $n\in\mathbb{N}$ が存在する。そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0,\quad a_k\neq 0.$$

すると

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

$g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$ は $z\in D(c;\varepsilon)$ で収束し、$g(z_n)=\dfrac{f(z_n)}{(z_n-c)^k}=\dfrac{0}{(z_n-c)^k}=0.$

9.2 一致の定理

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\exists n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) f^{(n)}(z) \ne 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\forall n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。

また $c \in D_1$ であるから $D_1 \neq \emptyset$.

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。

また $c \in D_1$ であるから $D_1 \neq \emptyset$.

前回紹介した命題 21.13 (これはトポロジーでは常識) より、$D_0 = \emptyset$, $D_1 = D$. ゆえに $f = 0$ in D.

定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0 = \{z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0\}$ **は開集合であること**

定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0 = \{z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0\}$ **は開集合であること**
(証明) $z_0 \in D_0$ とすると、D_0 の定義から $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)$ $D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ より z_0 の近くで $f^{(n)} \neq 0$. 実際、$\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、ある $\delta_2 > 0$ が存在して、$(\forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta_2)$ $\left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき
$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0$
であるから $f^{(n)}(z) \neq 0$.

定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0 = \{z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0\}$ **は開集合であること**
(証明) $z_0 \in D_0$ とすると、D_0 の定義から $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)$ $D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ より z_0 の近くで $f^{(n)} \neq 0$. 実際、$\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、ある $\delta_2 > 0$ が存在して、$(\forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta_2)$ $\left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき
$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0$
であるから $f^{(n)}(z) \neq 0$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0 = \{z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0\}$ **は開集合であること**
(証明) $z_0 \in D_0$ とすると、D_0 の定義から $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)\ D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ より z_0 の近くで $f^{(n)} \neq 0$. 実際、$\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、ある $\delta_2 > 0$ が存在して、$(\forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta_2)$ $\left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき
$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0$
であるから $f^{(n)}(z) \neq 0$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

$D_1 = \left\{z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0\right\}$ **は開集合であること**

定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0 = \{z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0\}$ **は開集合であること**
(証明) $z_0 \in D_0$ とすると、D_0 の定義から $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)$ $D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ より z_0 の近くで $f^{(n)} \neq 0$. 実際、$\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、ある $\delta_2 > 0$ が存在して、$(\forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta_2)$ $\left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき
  $\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0$
  であるから $f^{(n)}(z) \neq 0$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z;\delta) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

$D_1 = \left\{z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0\right\}$ **は開集合であること**
(証明) $z_0 \in D_1$ ならば、$(\exists R > 0)$ $(\exists \{a_n\}_{n \geq 0}$: 複素数列) $(\forall z \in D(z_0; R))$
$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. $z_0 \in D_1$ より、$(\forall n \geq 0)$ $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ なので、$f(z) = 0$. ゆえに $D(z_0; R) \subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。 □

9.2 一致の定理

念のため、前回説明した命題 21.3 も書いておく。

命題 21.3 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 22.1 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z - c| < +\infty$ ということになる。)

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 22.1 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z - c| < +\infty$ ということになる。)

「円環」という言葉にふさわしいのは、$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ の場合だけだろう。しかし、Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、(収束円のときと同様に) $R_1 = 0$ や $R_2 = +\infty$ の場合も考えるのが有効である。

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 22.1 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z - c| < +\infty$ ということになる。)

「円環」という言葉にふさわしいのは、$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ の場合だけだろう。しかし、Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、(収束円のときと同様に) $R_1 = 0$ や $R_2 = +\infty$ の場合も考えるのが有効である。

実は $R_1 = 0$ の場合が頻出する。このとき $A(c; R_1, R_2)$ は円盤 $D(c; R_2)$ から c を除いたものである。すなわち

$$A(c; 0, R_2) = D(c; R_2) \setminus \{c\}.$$

定理 22.2 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;R_1,R_2)).$$

右辺の級数は、$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \le |z-c| \le r_2\}$ で一様絶対収束する。

(1) が成り立つとき、$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(「円盤領域で正則な関数は Taylor 展開 (冪級数展開) 出来る」と比較しよう。)

定理 22.2 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f\colon A(c; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c; R_1, R_2)).$$

右辺の級数は、$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \le |z-c| \le r_2\}$ で一様絶対収束する。

(1) が成り立つとき、$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(「円盤領域で正則な関数は Taylor 展開 (冪級数展開) 出来る」と比較しよう。)

この定理の証明はやや重いが、級数の一様収束や項別積分の部分を抜きにした式変形の部分だけでも読み取って欲しい。

定義 22.3 (Laurent 展開)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき

$$(3)\qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;R_1,R_2))$$

を満たす $\{a_n\}$ が一意的に存在する。(3) を、f の $A(c;R_1,R_2)$ における **Laurent 級数展開**と呼ぶ。

特に $R_1 = 0$ のとき、f の c のまわりの (c における) **Laurent 級数展開**と呼ぶ。また、このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を f の Laurent 級数展開の**主部** (**主要部**, the principal part) と呼ぶ。また、a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ あるいは $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz$ で表す。

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
   (解説) f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

(この式は、もちろん $0<|z-c|<R$ でも成り立つ。)

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
(解説) f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad (|z-c|<R).$$

(この式は、もちろん $0<|z-c|<R$ でも成り立つ。)

一方、f は $A(c;0,R)$ で正則でもあるので、上の定理から Laurent 級数展開できる:

$$(\exists\{a'_n\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R).$$

Laurent 展開の一意性から、$n\geq 0$ のとき $a'_n=a_n$, $n<0$ のとき $a'_n=0$.

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
(解説) f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:
$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad (|z-c|<R).$$
(この式は、もちろん $0<|z-c|<R$ でも成り立つ。)
一方、f は $A(c;0,R)$ で正則でもあるので、上の定理から Laurent 級数展開できる:
$$(\exists\{a'_n\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-c|<R).$$
Laurent 展開の一意性から、$n\ge 0$ のとき $a'_n=a_n$, $n<0$ のとき $a'_n=0$.

Taylor 展開では
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$
が成り立つが、Laurent 級数展開では $f^{(n)}(c)$ が存在しない場合があることに注意。

例 22.4 (簡単な関数でゆっくりと)

(4)
$$f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}).$$

例 22.4 (簡単な関数でゆっくりと)

(4)
$$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

例 22.4 (簡単な関数でゆっくりと)

(4) $$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1}=1$, $a_n=0$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$ とおくと、$\displaystyle\frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n.$)

例 22.4 (簡単な関数でゆっくりと)

(4)
$$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1}=1$, $a_n=0$ ($n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$) とおくと、$\displaystyle\frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$.)

$c=0$ の周りの Laurent 展開は？

例 22.4 (簡単な関数でゆっくりと)

(4)
$$f(z)=\frac{1}{z-2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}).$$

まず $c=2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2;0,+\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1}=1$, $a_n=0$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$ とおくと、$\dfrac{1}{z-2}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$.)

$c=0$ の周りの Laurent 展開は？f は $D(0;2)$ で正則であるから、そこで冪級数展開出来る。実際

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad (\text{収束}\Leftrightarrow |z|<2)).$$

もちろん

(5)
$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad (0<|z|<2,\ \text{i.e. } z\in A(0;0,2)).$$

例 22.4 (つづき)

一方、f は $2<|z|<+\infty$ つまり $A(0;2,+\infty)$ でも f は正則であるから、そこで Laurent 展開出来る。実際

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \tag{6}$$

$$(2<|z|<+\infty \text{ i.e. } z\in A(0;2,+\infty)). \quad \square$$

(5) と (6) を見て違いを理解しよう。

注意 (続き)

2. 係数の公式 (2)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz$$

は、$D(c;R)$ で正則な関数の Taylor 展開の係数の式と同じ形である。「覚えられない」とギブ・アップしないように。

　この式を使って (線積分を計算することによって) a_n を求めることは稀である。(むしろ a_n を計算して積分を求める、と逆方向に利用することが多い。)

注意 (続き)

2. 係数の公式 (2)
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz$$
は、$D(c;R)$ で正則な関数の Taylor 展開の係数の式と同じ形である。「覚えられない」とギブ・アップしないように。
　この式を使って (線積分を計算することによって) a_n を求めることは稀である。(むしろ a_n を計算して積分を求める、と逆方向に利用することが多い。)

3. (1) を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と書く (1 つの $\sum$ で済ませる) こともあるが、
$$\lim_{N_1,N_2\to+\infty}\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n(z-c)^n$$
という意味である。Fourier 級数の場合の
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$
とは異なる。

4. 負の番号からなる項 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次のどれか 1 つ (だけ) が成立する。
   1. 任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して収束する。
   2. ある $R\in(0,+\infty)$ が存在して、$|z-c|>R$ ならば収束、$|z-c|<R$ ならば発散する。
   3. 任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して発散する。

   (i) のとき $R=0$, (iii) のとき $R=+\infty$ とすると、いずれの時も

   $$|z-c|>R\ \text{ならば収束、}\ |z-c|<R\ \text{ならば発散する}$$

   とまとめられる。

   おおざっぱに言うと、冪級数のときとは、不等号の向きが反対、ということ。

10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

4. (つづき) さらに

$$(\forall r > R) \quad \overline{A}(c; r, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} \mid |z - c| \geq r\} \text{ で一様絶対収束}$$

が成り立つ。実際 $\zeta := \dfrac{1}{z - c}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

右辺は ζ についての冪級数であるから、$0 \leq \rho \leq +\infty$ を満たすある ρ が存在して

> $|\zeta| < \rho$ ならば収束、$|\zeta| > \rho$ ならば発散、$0 < r < \rho$ を満たす任意の r に対して $\overline{D}(0; r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq r\}$ で一様に絶対収束する。

ゆえに

> $|z - c| > \dfrac{1}{\rho}$ ならば収束、$|z - c| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば発散、$\dfrac{1}{\rho} < r < +\infty$ を満たす任意の r に対して $|z - c| \geq r$ の範囲で一様に絶対収束する。

ゆえに $R := \dfrac{1}{\rho}$ とおけば良い。 □

実は Laurent 展開は項別微分もできる。

例 22.5

$$g(z) := \frac{1}{(z-2)^2}$$

の 0 の周りの Laurent 展開は？ $g(z) = -f'(z)$ (例 22.4 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$) であるから、f の Laurent 展開を項別に微分して -1 をかければよい。すなわち

$$g(z) = -f'(z) = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}$$

$$(z \in A(0;0,2)).$$

(要チェック) 同様にして、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{(z-2)^m}$ の Laurent 展開も求められる。 □

定理 22.2 の証明

(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。

定理 22.2 の証明

(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。

m を任意の整数とする。(1) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割って

(7) $$\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^{n-m-1} \quad (z\in A(c;R_1,R_2)).$$

$R_1<r<R_2$ を満たす任意の r に対して、円周 $|z-c|=r$ 上で Laurent 級数が一様収束するので、有界な $\dfrac{1}{(z-c)^{m+1}}$ をかけた (7) も一様収束する。ゆえに、項別積分が可能であり

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}\,dz&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} a_n(z-c)^{n-m-1}\,dz\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta_{nm}=a_m.\end{aligned}$$

これから、(2) が成立することと、その積分の値が r に依らないこと、さらに (1) を満たす $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的である (存在すればただ一つしかない) ことが分かる。

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = I + J.$$

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。

　r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

　ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = I + J.$$

　I は円盤における正則関数の Taylor 展開と同じ議論で、

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

この級数は $|z - c| < r_2$ で収束する。

J については、$|\zeta - c| = r_1$ のとき $\left|\dfrac{\zeta - c}{z - c}\right| = \dfrac{r_1}{|z-c|} < 1$ であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

が成り立ち

$$J = +\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta)d\zeta. \tag{8}$$

J については、$|\zeta - c| = r_1$ のとき $\left|\dfrac{\zeta - c}{z - c}\right| = \dfrac{r_1}{|z - c|} < 1$ であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

が成り立ち

$$J = +\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta) d\zeta. \tag{8}$$

Weierstrass の最大値定理によって、$M := \displaystyle\max_{|\zeta - c| = r_1} |f(\zeta)|$ が存在し、$|\zeta - c| = r_1$ ならば

$$\left|\frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta)\right| \le \frac{M}{r_1} \left(\frac{r_1}{|z - c|}\right)^n, \quad \left|\frac{r_1}{|z - c|}\right| < 1$$

が成り立つので、Weierstrass M-test が適用できて、(8) の右辺に現れる級数は、円周 $|\zeta - c| = r_1$ 上で一様収束する。

ゆえに項別積分が可能で

$$J = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{-n+1}}\, d\zeta \frac{1}{(z - c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n}.$$

この級数は $|z - c| > r_1$ で収束する。

ゆえに項別積分が可能で

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}f(\zeta)\,d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-n+1}}\,d\zeta\frac{1}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}.
\end{aligned}
$$

この級数は $|z-c|>r_1$ で収束する。

まとめると

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (r_1<|z-c|<r_2).
$$

r_1, r_2 $(R_1<r_1<r_2<R_2)$ が任意であることから、この級数は $A(c; R_1, R_2)$ で収束する。 □

補足: 定理の展開可能性の証明の骨格部分

(要点を 1 枚にまとめ直してみた。)

$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ となる r_1, r_2 を取って、円環領域 $D' = A(c; r_1, r_2)$ で考える。
$r_1 < |z-c| < r_2$ を満たす z に対して、Cauchy の積分公式から

$$(\sharp) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

$|\zeta - c| = r_2$ のとき、$\left|\frac{z-c}{\zeta-c}\right| = \frac{|z-c|}{r_2} =$ (ζ によらない定数) < 1 であるから

$$(\heartsuit) \qquad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)} = \frac{1}{\zeta-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}$$

$|\zeta - c| = r_1$ のとき、$\left|\frac{\zeta-c}{z-c}\right| = \frac{r_1}{|z-c|} =$ (ζ によらない定数) < 1 であるから

$$(\spadesuit) \qquad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)} = -\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-c}{z-c}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-c)^n}{(z-c)^{n+1}}$$

($\heartsuit$) と ($\spadesuit$) に $f(\zeta)$ をかけたものは、それぞれの円周上で一様収束する (Weierstrass M-test)。その 2 式を ($\sharp$) に代入して項別積分する。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).