

# 複素関数・同演習 第 21 回

～Green の定理, 正則関数の性質 (零点の位数, 一致の定理)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021 年 12 月 8 日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Green の定理と Cauchy の積分定理・積分公式
  - Green の定理
  - Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分定理
  - Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式
- 3 正則関数の性質 (前半)
  - 正則関数の零点とその位数
  - 一致の定理
- 4 参考文献

- 前回のスライド資料の最後に出した (説明は時間切れ) Green の定理と、それに基づく Cauchy の積分公式 (とても便利) について簡単に説明する。(そのココロ: Cauchy の積分公式を円盤領域バージョンから一般化するのに、その形が分かりやすい。)
  - 今後、どういうことを説明するか。大きく分けて2つ。
    - Ⓐ 正則関数の性質 (積分公式、解析性が得られたのでそれらを利用して)
    - Ⓑ Laurent 展開、留数、留数の応用 (定積分計算)
- (b) には計算練習の必要な項目が多いので、(a) の中で (b) で必要になることの説明を済ませた後は、(b) に移り、少しでも早く計算練習ができるようにする。そして重要ではあるけれど、問題演習の必要が少ない (a) の残りの部分は最後に説明する。
- 宿題 10 を出してあります (締め切りは 12 月 14 日 13:30)。

# 8 Green の定理と Cauchy の積分定理・積分公式

## 8.1 Green の定理

次の定理は“常識”とされるが、取り扱いは少しやっかいである。

### 定理 21.1 ((かなり一般的な) Green の公式)

$\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  の境界は、有限個の区分的  $C^1$  級正則単純閉曲線  $C_1, \dots, C_m$  の像の合併になっていて、各  $C_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) の進行方向の「左手」に  $D$  を見るようになっていとする。このとき、 $\overline{D}$  を含むある開集合で  $C^1$  級の関数  $P, Q$  に対して、

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

**証明** かなり難しいのでギブアップする。載っているのは杉浦 [1], 笠原 [2] くらい。□

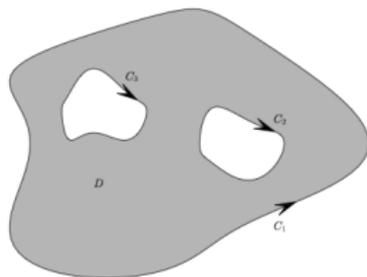


図 1: 領域  $D$  の境界  $\partial D$  は  $C_1 + C_2 + C_3$  に等しい

## 8.1 Green の定理

私のお勧めはこちら (一般性は低いが証明は比較的簡単)。

### 定理 21.2 (縦線領域における Green の公式)

$\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  は、( $x$  軸方向または  $y$  軸方向に) 縦線領域であり、その境界  $\partial D$  は、区分的  $C^1$  級曲線  $C$  の像になっていて、 $C$  の進行方向の左手に  $D$  が見えるようになっているとする。このとき、 $\bar{D}$  を含むある開集合で  $C^1$  級の関数  $P, Q$  に対して、

$$(1) \quad \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

**証明** 多くの微積分の教科書に載っている (「縦線領域」の定義などもそういうのを見て下さい)。例えば桂田 [3] を見よ。  $\square$

$D$  自身が縦線領域でなくても、縦線領域であるような部分領域  $D_1, \dots, D_m$  が存在して、任意の  $P, Q$  に対して

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \sum_{j=1}^m \int_{\partial D_j} P dx + Q dy$$

が成り立つような場合は、(1) が成立する。以下このことは使うことにする。

## 8.2 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分定理

### 定理 21.3 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分定理)

$D$  は  $\mathbb{C}$  の領域、 $D$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域とみなしたとき、Green の定理の仮定を満たすとす  
る。このとき  $\bar{D}$  を含む開集合で正則な  $f$  に対して

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

**証明** (これは以前も見せた。)  $f$  の実部・虚部をそれぞれ  $u, v$  とすると、 $u$  と  $v$  は  
Cauchy-Riemann の方程式を満たし、 $C^\infty$  級である (正則関数は何回でも微分可能であ  
ることが証明されている)。Green の定理を使った後で、Cauchy-Riemann 方程式を代入  
することで

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \\ &= \iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy \\ &= \iint_D 0 dx dy + i \iint_D 0 dx dy = 0. \quad \square\end{aligned}$$

## 8.3 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式

円盤における Cauchy の積分公式は証明してあるが、次の定理はいっそう便利である。

### 定理 21.4 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分公式)

$D$  は  $\mathbb{C}$  の領域で、 $\mathbb{R}^2$  の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、 $\bar{D}$  を含むある開集合で正則な関数  $f$  に対して、

$$(\forall a \in D) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

**証明** 任意の  $a \in D$  に対して、十分小さな正の数  $r$  を取ると、 $\bar{D}(a; r) \subset D$  が成り立つ。 $0 < \varepsilon < r$  を満たす任意の  $\varepsilon$  について、 $D_\varepsilon := D \setminus \bar{D}(a; \varepsilon)$  とおくと、 $D_\varepsilon$  も Green の公式が成り立つ領域となる。

$\partial D_\varepsilon = \partial D - C$ ,  $C : |z-a| = \varepsilon$  であるから、定理 21.3 によって

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

## 8.3 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式

(この後の証明は、前回紹介済みだが、再録しておく。)

ここで

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta - f(a) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)| \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)|. \end{aligned}$$

$f$  は  $a$  で連続であるから、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると右辺は  $0$  に収束する。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a). \quad \square$$

## 定義 21.5 (正則関数の零点とその位数)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$  とする。

- ①  $c$  が  $f$  の **零点** (zero) であるとは、 $f(c) = 0$  が成り立つことをいう。
- ②  $c$  が  $f$  の零点で、 $f$  が恒等的に 0 でないとき

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たす  $k \in \mathbb{N}$  を  $f$  の零点  $c$  の **位数** (order) と呼ぶ。

( $f$  が恒等的に 0 でないとき、上の条件を満たす  $k$  の存在が証明できる。)

命題 21.6 ( $k$  位の零点であるための条件)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$  とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

- (i)  $c$  は  $f$  の  $k$  位の零点である。
- (ii)  $c$  を含む開集合  $U (c \in U)$  と、 $U$  で正則な関数  $g$  が存在して、 $f(z) = (z - c)^k g(z)$  ( $z \in U$ ) かつ  $g(c) \neq 0$ 。

## 9.1 正則関数の零点とその位数

### 注意 21.7 (多項式の根について復習)

**多項式**  $f(z)$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  について、以下の3条件は互いに同値である。

- ①  $c$  は  $f(z)$  の根で、重複度は  $k$  ( $k$  重根 — 単根のとき 1 重根というとして)。
- ②  $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z]) f(z) = (z - c)^k g(z)$ ,  $g(c) \neq 0$ 。
- ③  $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$  かつ  $f^{(k)}(c) \neq 0$ 。

命題 21.6 はこの一般化と言える。 □

### 例 21.8

- ①  $f(z) = z^2 + 2z + 1$ .  $f(z) = (z + 1)^2$  であるから、 $f$  の零点は  $-1$  のみ。  
 $f'(z) = 2z + 2$  なので  $f'(-1) = 0$ .  $f''(z) = 2$  なので  $f''(-1) \neq 0$ .  $-1$  の位数は 2.
- ②  $f(z) = \sin z$  のとき、 $f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = k\pi$ . ゆえに  $f$  の零点は  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). 位数は全て 1 である。実際、 $f(k\pi) = \sin k\pi = 0$ ,  
 $f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$  であるから。
- ③  $f(z) = \cos z - 1$  のとき、 $f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi$ .  $f(2k\pi) = 1 - 1 = 0$ ,  
 $f'(2k\pi) = -\sin 2k\pi = 0$ ,  $f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1 \neq 0$  であるから  $2k\pi$  は 2 位の零点である。

## 9.1 正則関数の零点とその位数

では、命題 21.6 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するか注目してほしい ((i) $\Rightarrow$ (ii) で **冪級数展開を用いる**)。

### 命題 21.6 の証明.

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Omega$  は開集合であるから、ある  $R > 0$  が存在して、 $\overline{D(c; R)} \subset \Omega$ . 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists \{a_n\}_{n \geq 0}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (|z - c| < R).$$

このとき  $a_n = f^{(n)}(c)/n!$  であるから、 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ ,  $a_k \neq 0$ . ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^{n-k} \\ &= (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \quad (|z - c| < R). \end{aligned}$$

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n$  とおくと、 $g$  は  $D(c; R)$  で正則であり、 $g(c) = a_k \neq 0$ .  $\square$

## 9.1 正則関数の零点とその位数

### 命題 21.6 の証明 (つづき).

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $h(z) := (z - c)^k$  とおくと、 $f(z) = h(z)g(z)$  であるから

$$f^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} h^{(r)}(z) g^{(m-r)}(z).$$

$r \leq k - 1$  ならば  $h^{(r)}(c) = 0$ ,  $h^{(k)}(c) = k!$  であることに注意しよう。

$0 \leq m \leq k - 1$  ならば  $h^{(r)}(c) = 0$  ( $0 \leq r \leq m$ ). ゆえに

$$f^{(m)}(c) = \sum_{r=0}^m 0 = 0.$$

一方、

$$f^{(k)}(c) = \binom{k}{k} h^{(k)}(c) g^{(0)}(c) = 1 \cdot k! g(c) \neq 0.$$

ゆえに  $c$  は  $f$  の  $k$  位の零点である。 □

## 9.2 一致の定理

### 定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

$D$  は  $\mathbb{C}$  の領域 (弧連結な開集合)、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  と  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in D$ , 複素数列  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は二条件

①  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$

②  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して  $z_n \in D$  かつ  $z_n \neq c$  かつ  $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、 $D$  全体で  $f = g$ .

$z_n$  は関数  $F(z) := f(z) - g(z)$  の零点である。恒等的に 0 でない正則関数が無限個の零点を持つことがある (例:  $F(z) = \sin z$ ,  $z = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )) ことに注意しよう。「 $F$  の **零点が定義域内の点に集積** したら  $F = 0$ 」ということである。

一致の定理は上の形で提示されるのが多いが、応用上は次の形で使うことが多い。

- $D$  内の線分や正則曲線の上で  $f = g$  が成り立つならば、 $f = g$  が成り立つ。
- $D$  内の空でない開集合内で  $f = g$  が成り立つならば、 $f = g$  が成り立つ。

この定理を証明する前に、この定理を使った例をいくつか見てみよう。

## 9.2 一致の定理

正則関数の零点に関して、次の事実は重要である。

### 系 21.10

$\mathbb{C}$  の領域  $D$  における正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち  $c$  が定数でない正則関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  の零点ならば、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

(十分小さな正数  $\varepsilon$  を取ると、 $c$  から距離  $\varepsilon$  未満の範囲では、 $c$  以外に  $f$  の零点はない。)

### 証明.

背理法を用いる。結論を否定すると、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in D \cap D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) = 0.$$

各  $n \in \mathbb{N}$  に対して ( $\varepsilon = 1/n$  として)、 $0 < |z_n - c| < \frac{1}{n}$ ,  $f(z_n) = 0$  を満たす  $z_n \in D$  が取れる。一致の定理から  $f = 0$  in  $D$  が導かれる。これは矛盾である。  $\square$

## 9.2 一致の定理

一致の定理から、 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が正則で

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = g(x)$$

を満たすならば、次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = g(z).$$

### 例 21.11 (実関数を正則に拡張する仕方は1つしかない)

この講義では、初等関数を、微積分で得られた Taylor 展開を用いて正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

から

$$(\star) \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

上で述べたことから、正則な  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で、 $f(x) = \cos x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) を満たすものは、存在するならば一意である。言い換えると、 $\cos x$  の拡張に、正則性を要求する限り、 $(\star)$  とする以外の選択肢はない。 □

## 9.2 一致の定理

### 例 21.12 (関数関係不変の原理 (英語では言わない?))

例えば実指数関数の指数法則

$$(2) \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つことは既知として、複素指数関数の指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。

実指数関数と複素指数関数を混同すると分かりにくくなるので、しばらく複素指数関数  $e^z$  は  $E(z)$ , 実指数関数は  $e^x$  と書き分ける。 $E$  は  $e^x$  の拡張である。つまり

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = e^x$$

が成り立つことを認めて議論する<sup>a</sup>。

任意の  $y \in \mathbb{R}$  を固定して、関数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$f(z) := E(z+y) - E(z)E(y) \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定める。関数  $E$  は正則であるから、 $f$  は  $\mathbb{C}$  で正則である。

## 9.2 一致の定理

### 例 21.12 (つづき)

また、 $z = x \in \mathbb{R}$  のとき、(2) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により  $(\forall z \in \mathbb{C}) f(z) = 0$ . すなわち

$$(3) \quad (\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

次に任意の  $z \in \mathbb{C}$  を固定して、関数  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$g(w) := E(z+w) - E(z)E(w) \quad (w \in \mathbb{C})$$

で定める。この  $g$  は  $\mathbb{C}$  で正則である。また、 $w = y \in \mathbb{R}$  のとき、(3) より

$$g(w) = g(y) = E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

ゆえに一致の定理により  $(\forall w \in \mathbb{C}) g(w) = 0$ . すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}) \quad E(z+w) - E(z)E(w) = 0.$$

ゆえに指数法則  $E(z+w) = E(z)E(w)$  が成り立つ。 □

## 9.2 一致の定理

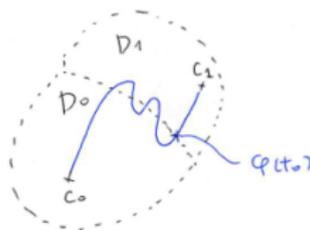
### 命題 21.13 (弧連結な開集合は連結)

$D$  は  $\mathbb{C}$  の弧連結な開集合、 $D_0$  と  $D_1$  は  $\mathbb{C}^n$  の開集合で  $D_0 \cup D_1 = D$ ,  $D_0 \cap D_1 = \emptyset$  とすると、 $D_0$  と  $D_1$  のいずれかが空集合である。

**命題 21.13 の証明** 背理法を用いる。 $D_0 \neq \emptyset$  かつ  $D_1 \neq \emptyset$  と仮定して矛盾を導く。

$c_0 \in D_0$ ,  $c_1 \in D_1$  を取る。

$D$  は弧連結であるから、ある連続な  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$  が存在して  $\varphi(0) = c_0$ ,  $\varphi(1) = c_1$ .



$$I_0 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0, 1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

$D_0$  と  $D_1$  は開集合、 $\varphi$  は連続であるから、 $(\exists \delta_0 > 0) [0, \delta_0] \subset I_0$ 、また  $(\exists \delta_1 > 0) [1 - \delta_1, 1] \subset I_1$ .

$t_0 := \sup I_0$  とおくと、 $0 < t_0 < 1$ .  $t_0$  と  $0, 1$  との距離は  $d := \min\{t_0, 1 - t_0\} > 0$ .

## 9.2 一致の定理

### 証明 (続き)

$t_0 \in I_0$  の場合、 $\varphi(t_0) \in D_0$ .  $D_0$  は開集合であるから、 $\exists \varepsilon_1 \in (0, d)$  s.t.  $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0$ . すると  $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$  となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$  の場合、 $\varphi(t_0) \in D_1$ .  $D_1$  は開集合であるから、 $\exists \varepsilon_2 \in (0, d)$  s.t.  $(t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1$ .  $I_1$  と共通部分のない  $I_0$  の上限が  $I_1$  の内部にあるのは矛盾である。 □

## 9.2 一致の定理

証明は次回講義に回すことにしました。 定理 21.9 の証明は結構長い。

### 定理 21.9 の証明

$f - g$  を新たに  $f$  と置いて考えることで、 $g = 0$  の場合に証明すれば良いことが分かる。

**Step 1.**  $D$  は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) \overline{D(c; \varepsilon)} \subset D$ . 正則関数の冪級数展開可能性より、 $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

まずこの円盤  $D(c; \varepsilon)$  で  $f = 0$  であることを示す。

実は任意の  $n$  に対して  $a_n = 0$  である。実際、もしそうでないと仮定すると、 $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  s.t.  $a_n \neq 0$ . そのような  $n$  のうち、最小のものを  $k$  とおくと、

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0.$$

すると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

## 9.2 一致の定理

### 定理 21.9 の証明 (続き)

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n$  は  $z \in D(c; \varepsilon)$  で収束し、

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - c)^k} = \frac{0}{(z_n - c)^k} = 0.$$

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の  $n$  に対して  $a_n = 0$ 。ゆえに  $f(z) = 0$  ( $z \in D(c; \varepsilon)$ )。

#### Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \mid (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は  $D_0$  と  $D_1$  は開集合である (理由は次のスライド)。また  $c \in D_0$  であるから  $D_0 \neq \emptyset$ 。以下に紹介する命題 21.13 より、 $D_1 = \emptyset$ ,  $D_0 = D$ 。ゆえに  $f = 0$  in  $D$ 。

## 9.2 一致の定理

### 定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0$  は開集合であること 実際、 $z_0 \in D_0$  ならば、 $(\exists R > 0) (\exists \{a_n\}_{n \geq 0}$ : 複素数列)

$(\forall z \in D(z_0; R)) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ . ところが  $z_0 \in D_0$  より、任意の  $n$  に対して

$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$  なので、 $f(z) = 0$ . ゆえに  $D(z_0; R) \subset D_0$ . ゆえに  $D_0$  は開集合である。

$D_1$  は開集合であること  $f^{(n)}$  が連続関数であることから、 $D_1$  は開集合であることが分かる。実際、 $z_0 \in D_1$  とするとき、 $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z_0) \neq 0$ .

- $D$  が開集合であることから、 $(\exists \delta_1 > 0) D(z_0; \delta_1) \subset D$ .
- $\varepsilon := |f^{(n)}(z_0)|$  とおくと、 $\varepsilon > 0$  であり、 $f^{(n)}$  は連続であるから、 $(\exists \delta_2 > 0)$

$(\forall z \in D: |z - z_0| < \delta_2) |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)| < \varepsilon$ . このとき

$$|f^{(n)}(z)| = |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)| \geq |f^{(n)}(z_0)| - |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

ゆえに  $f^{(n)}(z) \neq 0$ . 従って  $z \in D_1$ .

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とおくと、 $\delta > 0$  かつ  $D(z; \delta) \subset D_1$ . ゆえに  $D_1$  は開集合である。  $\square$

# 参考文献

- [1] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), 丸善 eBook では、  
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844> でアクセスできる.
- [2] 笠原乾吉：複素解析, 1 変数解析関数, 実教出版 (1978), 2016 年にちくま学芸文庫に入った (ファンとして非常に嬉しい)。新井仁之先生の書評が  
<http://researchmap.jp/joqp1cgc9-1782088/> にある。ついに Kindle 化されたので買えなくなることはなくなったが、数式の見栄えが poor である。文庫に入ったのは最近のことなのに、なぜこうなる??
- [3] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部,  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf>  
(内容はベクトル解析) (2006~).