複素関数・同演習 第 20 回

〜円盤における Cauchy の積分公式 (第 2 回), 正則関数の冪級数展開〜

桂田(かつらだ) 祐史(まさし)

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021 年 12 月 7 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回までで、ようやく Cauchy の積分公式 (円盤バージョン) が証明できた。この後は速く事(こと)が進む。まずは、正則関数の冪級数展開可能性 (解析性) を示す。この定理の重要性はどれほど強調しても、しすぎにはならないだろう。系として(ついでに?)「原始関数が存在すれば正則」という定理, 有名な Morera の定理の証明等々、懸案の課題がクリアできる。また冪級数展開の収束半径についても考察する。⋯ ここまでが §7.2. 速い進行。必修。
- Cauchy の積分公式の証明には、違うやり方を採用しているテキストも多い。参考になると思われるので紹介する (§7.3)。そのために必要な積分路の変形の証明は、バラエティに富んでいる。それについては §7.4 を用意した。(積分路の変形に慣れるのは良いことなので、時間の許す限り話してみる。気楽に聴いて下さい。)
- §7 の内容は、この講義と、講義ノート [1] でほぼ同じであるが、中の分け方は対応していない (今後講義ノートの方をこちらのスライドの内容に合わせる予定)。
- 宿題 9 の解説をします。
- 宿題 10 を出します。〆切は 12 月 14 日。

定理 20.1 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D).$$

証明　円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

次の変形は少し長いが、すでによく知っているものである。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\zeta-c}} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

7.2.1 正則関数の解析性

ゆえに

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max |f|}{R} r^n$ とおくと、| 一般項 | $\le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに項別積分が可能で

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \quad \square$$

…… 重要な定理が、こんなに手早く (スライド 1 枚半で) 証明できるとは。ここは関数論の 1 つのクライマックスだろう。(当然？) 本日一番重要な結果である。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 20.2 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** **(analytic)** であるといい、解析的な関数を**解析関数** **(analytic function)** と呼ぶ。

定理 20.1 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

系 20.3

正則関数は何回でも微分可能である。

証明　正則関数は定義域の各点の近傍で冪級数展開可能であり、冪級数は何回でも微分可能であるから。 □

系 20.4

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明　複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 $\square$

注意　第 18 回の講義で次の 3 条件をあげ、(i)⇔(ii) を証明してあった。

1. f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
2. Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
3. f は Ω で正則である

予告した (i)⇒(iii) (これが系 20.4) がやっと証明できた。ゆえに **Morera の定理** ((ii)⇒ (iii) という内容) も証明できた。

7.2.1 正則関数の解析性

その他にも、懸案の問題が片付く。

- 任意の正則関数は 2 回微分可能で、2 階導関数は連続であるから、定理 7.1「任意の正則関数の実部・虚部は調和関数である」の証明が完了する。
- 任意の正則関数の導関数は連続であることが分かるので、逆関数定理 (定理 7.3) で、導関数の連続性を仮定する必要がなくなる。

宿題完了。

やれやれ…(肩の荷が降りる)

7.2.2 冪級数展開の収束半径

正則関数は定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できる (定理 21.3)。その収束半径について何がわかるだろうか。

一般的な定理を紹介する前に、実例で考えよう。例えば

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad (z \in \Omega), \quad c = 0.$$

(もちろん、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ が冪級数展開で、収束半径 $\rho = 1$ と分かるが、具体的に冪級数展開しないで、そのことを示せないか、考えてみよう。)

$0 < R < 1$ を満たす任意の R について、f は $D(0; R)$ で正則で、$\overline{D(0; R)} \subset \Omega$ が成り立つので、定理 20.1 より、f は $D(0; R)$ で冪級数展開できる。すなわち、ある $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が存在して

$$(2) \qquad (\forall z \in D(0; R)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

R の取り方には自由度があるが、$\{a_n\}_{n \geq 0}$ 自体は R によらずに定まる (繰り返しになるが $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ でこれは共通である)。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

任意の $R \in (0,1)$ に対して、(2) が成り立つので、結局は次式が成り立つ。

$$(3) \qquad (\forall z \in D(0;1)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

この右辺の冪級数の収束半径 ρ は何だろう。$D(0;1)$ で収束するので、収束半径の定義から $\rho \geq 1$ が導けるが、実は $\rho = 1$ である。直観的には、円周 $|z-0| = 1$ の上に f の特異点 $\pm i$ があるからであるが、きちんと示そう。

証明 $\rho > 1$ と仮定して矛盾を導く。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円 $D(0;\rho)$ で正則で、背理法の仮定 $\rho > 1$ から $i \in D(0;\rho)$ であるから、$z \to i$ のとき有限な複素数に収束する。特に

$$\lim_{\substack{z \to i \\ z \in D(0;1)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

ところが $z \to i$ のとき $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} \to \infty$. 特に

$$\lim_{\substack{z \to i \\ z \in D(0;1)}} f(z) = \infty.$$

これは (3) に矛盾する。ゆえに $\rho = 1$ である。(証明終)

7.2.2 冪級数展開の収束半径

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる (証明を書くのはサボるけど簡単)。

定理 20.5 (冪級数展開の収束半径 — 特異点があればそこまで)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$ で $D(c;R) \subset \Omega$、円周 $|z-c| = R$ 上に f の特異点 z_0 (ここでは $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D(c;R)}} f(z)$ が収束しない、と言う意味) が存在するならば、f の c における冪級数展開の収束半径は R である。

この定理はかなり使えて便利である (マスターしよう) が、これでは扱えない場合もある。

(以下ちょっと細かい話になる)　次の冪級数は見覚えがあるであろう。

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (z \in D(0;1)).$$

この冪級数の収束半径が 1 であることはすぐ分かる。ゆえにある $R > 1$ が存在して、g が $D(0;R)$ で正則ということはあり得ない。

一方、この冪級数は $\overline{D}(0;1)$ で一様収束するので、$\overline{D}(0;1)$ 上の任意の点 z_0 で連続であることも分かる。特に $z \to z_0$ のとき $g(z)$ は収束する。

この冪級数の収束半径が 1 であることは、定理 20.5 からは示せない。

余談　$g(z)$ は、二重対数関数と呼ばれる関数 $\mathrm{Li}_2(z)$ の冪級数展開である。$\mathrm{Li}_2(z)$ は、通常 $[1,+\infty)$ を分岐截線として、$\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$ で正則と定義される。1 はある種の特異点であると言える。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

次の形にしておくと (やや定理の主張が分かりにくいが)、広い場合に適用できる。

定理 20.6 (冪級数展開の収束半径)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$ とする。

$$A=\left\{R\in(0,+\infty)\ \middle|\ \begin{array}{l}D(c;R)\text{ で正則な関数 }F\text{ と }\varepsilon\in(0,R]\text{ が存在して、}\\ D(c;\varepsilon)\text{ で }f=F\end{array}\right\}$$

とおくとき、f の c の周りの冪級数展開の収束半径 ρ は $\sup A$ に等しい。

次のスライドに証明を書いておくが、話が細かくなるので授業での説明は省略する。

証明.

最初に $\rho > 0$ であることを注意する。(明らかに近いが、一応証明を書くと、開集合であることから $(\exists\varepsilon > 0)\ D(c;\varepsilon) \subset \Omega$. $R = \varepsilon/2$ と取れば $\overline{D}(c;R) \subset \Omega$. 定理 21.3 より $R \in A$. ゆえに $\rho = \sup A \ge R > 0$.)

(a) ρ が有限の数である場合

- 収束半径の定義により、$\rho \in A$. ゆえに $\rho \le \sup A$.
- 一方、$R \in A$ とするとき、任意の $\varepsilon \in (0,R)$ に対して $\overline{D}(c;R-\varepsilon) \subset \Omega$ であるから、定理 21.3 より、f の c の周りの冪級数展開は $D(c;R-\varepsilon)$ で収束する。ゆえに収束半径の定義から $R-\varepsilon \le \rho$. これが任意の ε について成り立つことから、$R \le \rho$. ゆえに $\sup A \le \rho$.

以上から $\rho = \sup A$.

(b) $\rho = +\infty$ である場合、f の c の周りの冪級数展開は $\mathbb{C}$ 全体で収束するので、その和が定める関数は $\mathbb{C}$ で正則である。特に任意の正の実数 R に対して、その冪級数は $D(c;R)$ で収束するので、$R \in A$. ゆえに $\sup A = +\infty$. すなわち $\rho = \sup A$.

□

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

じつは、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

まず既に説明した証明を振り返ってみよう。

証明のあらすじ　関数 $z \mapsto \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ は Ω で連続かつ a を除いて正則であるから、星型領域における Cauchy の積分定理で

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = 0.$$

移項して

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z-a}.$$

$|a-c|<R$ のとき $\displaystyle\int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ であるから、右辺は $2\pi i f(a)$ に等しい。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a). \quad \square$$

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

積分路の変形による Cauchy の積分公式の別証明 (ちょっと注目…次のスライドまで)

多くのテキストで、"積分路の変形" を用いる証明が採用されている。この方法は発展性がある (円周でない閉曲線 C に対して、積分公式が示せたりする。) その方法で (あくまでも円盤の場合に) 証明してみよう。

$|c-a|<R$ だから $R-|c-a|>0$. $0<\varepsilon<R-|c-a|$ を満たす任意の ε に対して

(4)
$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

が成り立つことを導く (積分路を $|z-c|=R$ から $|z-a|=\varepsilon$ に変形した)。

もしも (4) が示されれば、$z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,2\pi]$) とおいて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.$$

$\varepsilon\to 0$ とすると

(♠)
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a)\,d\theta=f(a).$$

となることは容易に分かる (次のスライド)。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a).$$

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

(♠) を確認しよう。差の絶対値を評価する。

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\Big)\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|.\end{aligned}$$

この右辺は、f が a で連続であることから、$\varepsilon\to 0$ のとき 0 に収束する。

残る問題は、

(再掲 4)
$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

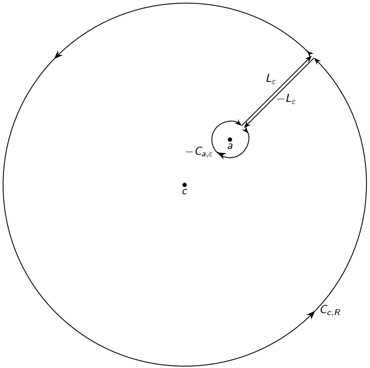
を示すことであるが、この積分路の変形には色々なやり方がある。

以下では、時間の許す範囲で紹介してみる。

$0 < \varepsilon < R - |c-a|$ を満たす任意の ε に対して

(再掲 4)
$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

が成り立つ。色々な証明がテキストに載っている。代表的なものを紹介しよう。



$\overline{D}(a;\varepsilon) \subset D(c;R)$ となるような $\varepsilon > 0$ を 1 つ取る (例えば $\varepsilon := (R - |a-c|)/2$)。$\phi$ を $a-c$ の偏角とする。$a - c = |a-c|e^{i\phi}$ が成り立つ。

点 p を中心とする半径 r の円周を一周する曲線を $C_{p,r}$ と表す ($z = p + re^{i\theta}$ ($\theta \in [\phi, \phi + 2\pi]$))。$C_{c,R}$ と $C_{a,\varepsilon}$ を用いる。

点 $a + \varepsilon e^{i\phi}$ から $a + (R - |a-c|)e^{i\phi}$ にまっすぐ進む曲線を L_ε と表す。

これらの記号を用いて $C_\varepsilon := C_{c,R} - L_\varepsilon - C_{a,\varepsilon} + L_\varepsilon$ とおく。C_ε は閉曲線である。

7.4.1 証明 1: 往復の橋を渡す

C_ε の周上と囲む範囲では、被積分関数は正則であるから

$$(\sharp) \qquad \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0.$$

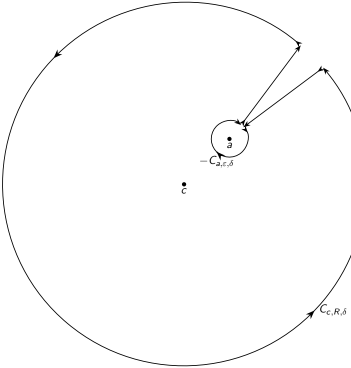
一方、L_ε と $-L_\varepsilon$ に沿う線積分は打ち消し合うので、

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_{c,R}} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{C_{a,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz. \quad \text{(証明終)}$$

批判的モードになってみると、この曲線 C_ε は単純閉曲線ではないので、なぜ $(\sharp)$ が成り立つのか、すっきりしないきらいがある (この証明を載せている本では、「単純閉曲線 C の囲む領域と、C の上で f が正則ならば $\int_C f(z)\,dz = 0$」という形の Cauchy の積分定理が書いてあって、それを根拠としているようだが、C_ε は単純閉曲線ではない)。この点を改良した証明を次に紹介する。



上の C_ε は単純閉曲線でなかったが、正の角度 δ 開いた曲線 $C_{\varepsilon,\delta}$ を作る:

$$C_\delta := C_{c,R,\delta} - L_{\varepsilon,\delta} - C_{a,\varepsilon,\delta} + L_{\varepsilon,\delta}.$$

(個々の曲線 $C_{c,R,\delta}$, L_δ, $C_{a,\varepsilon,\delta}$ の定義は書かないが、図を見れば解読出来るであろう。)

7.4.2 証明 2: 開いてから閉じる

この曲線 $C_{\varepsilon,\delta}$ は単純閉曲線であり、

$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

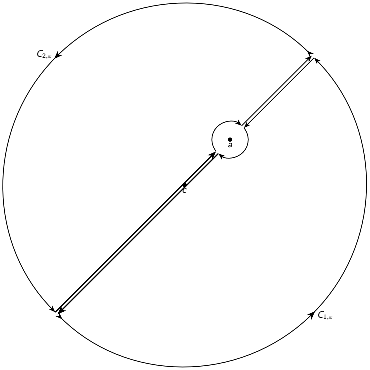
となることは説明しやすい。それから $\delta \to 0$ とすることにより

$$\int_{C_{\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

が示せるであろう。この後は、前項の証明をたどれば良い。 (証明終)

このような曲線の極限移行をする証明を学生に見せる価値はある、という気もする反面、実際にきちんとやるのは、複素関数を受講している平均的な学生 (2 年生) にとっては難しそうだ。どうも教師の自己満足になってしまいそうで気が引ける。

7.4.3 証明 3: 2 本の橋を渡して 2 つの閉曲線をつくる



$C_{1,\varepsilon}$, $C_{2,\varepsilon}$ を図のように定めると、どちらも区分的 C^1 級の閉曲線であり、

$$\int_{C_{1,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0, \quad \int_{C_{2,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

が成り立つことは説明しやすい。例えば次のような説明で納得してもらえるのではないだろうか。

7.4.3 証明3: 2本の橋を渡して2つの閉曲線をつくる

a. $C_{j,\varepsilon}$ は単純閉曲線で、$C_{j,\varepsilon}$ 上にも、$C_{j,\varepsilon}$ の囲む領域の内部にも、$\dfrac{f(z)}{z-a}$ が微分可能でない点は存在しない ($j=1,2$)。
b. $\dfrac{f(z)}{z-a}$ が正則な領域 $\Omega\setminus\{a\}$ において、$j=1,2$ のそれぞれに対して、星型の部分領域 (例えば円盤領域から1つの半径を除いたもの) で $C_{j,\varepsilon}$ を含むものが存在する。そこで星型領域における Cauchy の積分定理を適用する。

そうすると

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz-\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{C_{1,\varepsilon}+C_{2,\varepsilon}}\frac{f(z)}{z-a}dz=0+0=0.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

(気付いた人も多いと思うが、補題 19.7 に対して前回与えた証明 1 は、この証明をもじったものである。§7.4 で検討するうちでは、この証明がすぐれていると私は思う。)

7.4.4 証明 4: Green の定理を使う

Green の定理を使う、以下のような証明も考えられる。

$0 < \varepsilon < R - |c-a|$ を満たす任意の ε に対して、

$$D := D(c;R) \setminus \overline{D(a;\varepsilon)}$$

とおく。D の境界 ∂D は、二つの円周 $|z-c|=R$, $|z-a|=\varepsilon$ からなる。∂D を正の向きにするには、$|z-a|=\varepsilon$ の方は通常と逆向き (時計回り) にする。

Green の定理 (D を縦線領域の和に分割出来るので、難しいバージョンは不要) によって

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

一方

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

であるから

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \quad \square$$

このやり方は見通しが良いが、Cauchy の積分公式を証明する前に f' の連続性が示せていないので、最初から f' が連続という仮定をする必要がある。

関数論のテキストの中には、関数の正則性の仮定に、微分可能性だけでなく、導関数の連続性を要求して、この証明法を採用するものがある。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).