複素関数・同演習 第 19 回

～Cauchy の積分定理 (第 3 回), 円盤における Cauchy の積分公式 (1)～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021 年 12 月 1 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回は、星型、単連結という言葉の紹介をし、星型領域で Cauchy の積分定理が成り立つことを証明した。今回は、定理の例を 1 つ紹介した後、積分路の変形について説明し、単連結領域でも Cauchy の積分定理が成り立つ、という話をした後、円盤領域における Cauchy の積分公式を紹介する。
- もう秋学期が 2/3 終わるところで、これで間に合うのか？だいじょうぶ。この後は "帝王道路のドライブ[1]" をするから。
  … 体感速度が上がるかも知れません。心して下さい。

[1] 有名な高木貞治という数学者が、有名な教科書 [1] の中で「解析函数の定義が忽然大空から降り来って、忽ちにして虚数積分、忽ちにして留数、忽ちにしてテーロル展開と一呼吸の間に演繹されてしまうような帝王道路のドライブは歴史の歩みではない。」と形容したように、関数論の議論は、線積分の議論がスタートしてからは猛スピードで進んでしまう。

6.6 星型領域における Cauchy の積分定理 (続き)

例 19.1 ($\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ における $\frac{1}{z}$ の原始関数 — Log)

$\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ は星型領域である (任意の $z \in \Omega$ に対して $[1, z] \subset \Omega$)。

6.6 星型領域における Cauchy の積分定理 (続き)

例 19.1 ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ における $\frac{1}{z}$ の原始関数 — Log)

$\Omega:=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ は星型領域である (任意の $z\in\Omega$ に対して $[1,z]\subset\Omega$)。また $f(z):=\dfrac{1}{z}$ は Ω で正則である。ゆえに

$$F(z):=\int_{[1,z]}f(\zeta)\,d\zeta=\int_{[1,z]}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおくと $F'(z)=f(z)=\dfrac{1}{z}$.

例 19.1 ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ における $\frac{1}{z}$ の原始関数 — Log)

$\Omega:=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ は星型領域である (任意の $z\in\Omega$ に対して $[1,z]\subset\Omega$)。また $f(z):=\dfrac{1}{z}$ は Ω で正則である。ゆえに

$$F(z):=\int_{[1,z]}f(\zeta)\,d\zeta=\int_{[1,z]}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおくと $F'(z)=f(z)=\dfrac{1}{z}$.

(そうか、この F は $\dfrac{1}{z}$ の原始関数か…あれ？それは知っていたぞ。)

例 19.1 ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ における $\frac{1}{z}$ の原始関数 — Log)

$\Omega:=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ は星型領域である (任意の $z\in\Omega$ に対して $[1,z]\subset\Omega$)。また $f(z):=\dfrac{1}{z}$ は Ω で正則である。ゆえに

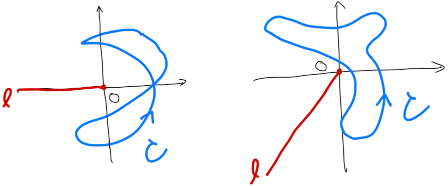
$$F(z):=\int_{[1,z]}f(\zeta)\,d\zeta=\int_{[1,z]}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおくと $F'(z)=f(z)=\dfrac{1}{z}$.
(そうか、この F は $\dfrac{1}{z}$ の原始関数か…あれ？それは知っていたぞ。)

実は $F(z)=\operatorname{Log}z$ (主値) である。実際 $F'(z)=\dfrac{1}{z}=(\operatorname{Log}z)'$ であるから、$(F(z)-\operatorname{Log}z)'=0$. したがって、$F(z)-\operatorname{Log}z$ は定数関数で、$z=1$ で $0-0=0$ に等しいので、$F(z)-\operatorname{Log}z=0$. ゆえに

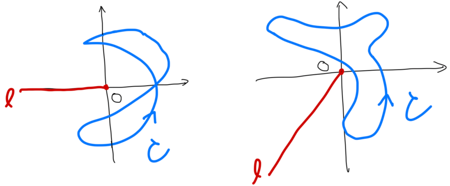
(1) $$\operatorname{Log}z=\int_{[1,z]}\frac{d\zeta}{\zeta}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]).\qquad\square$$

- 同様に原点を始点とする任意の半直線を ℓ とするとき、$\mathbb{C}\setminus\ell$ において $\dfrac{1}{z}$ の原始関数が存在し、$\mathbb{C}\setminus\ell$ 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z} = 0$.



6.6 星型領域における Cauchy の積分定理

- 同様に原点を始点とする任意の半直線を ℓ とするとき、$\mathbb{C}\setminus\ell$ において $\dfrac{1}{z}$ の原始関数が存在し、$\mathbb{C}\setminus\ell$ 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}=0.$



- (フライング) 単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 18.1) を用いると、$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に含まれる任意の単連結領域 Ω において、$\dfrac{1}{z}$ の原始関数が存在し、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}=0$ が成り立つ。 □

6.7 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

積分路の変形

f が正則な範囲で曲線 C_1 が曲線 C_2 に変形出来るならば、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$

6.7 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

積分路の変形

f が正則な範囲で曲線 C_1 が曲線 C_2 に変形出来るならば、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$

詳しく言うと、次の 2 つの場合がある。

(a) 積分路の始点と終点は変えずに (固定して)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。

(b) 積分路が閉曲線の場合は (始点、終点は気にせず)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。

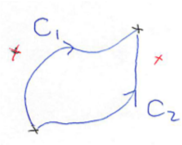


図 1: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

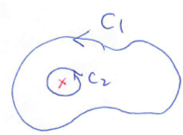
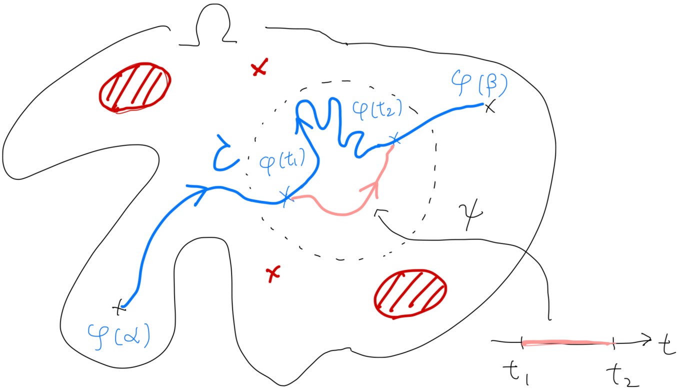


図 2: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

6.7 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

「連続的に変形」を理解して、(b) を認めると、単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 18.1) が得られる。単連結領域では、閉曲線 C は 1 点 (定数曲線 $z=\varphi(t)=c$ ($t\in[\alpha,\beta]$)) に連続的に変形できて、定数曲線上の任意の線積分は 0 であるから。詳しい説明 (証明) は、講義ノート [2] の付録 **E** 節を見よ。

ここでは、次の簡単な事実 (定理にできる) を理解することだけを要求する。(実は、積分路を連続的に変形したときに線積分の値が変わらないことの証明の本質的な部分)。



赤い点がなければ、積分路は工事可能　正則関数の定義域 Ω に含まれる任意の開円盤の中では (円盤の中に赤い点が一つもなければ)、積分路の工事が出来る。つまり、$C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ が、

$$D(c;r)\subset\Omega,\quad t_1,t_2\in[\alpha,\beta],\quad \varphi([t_1,t_2])\subset D(c;r)$$

を満たすならば、$\psi(t_1)=\varphi(t_1)$, $\psi(t_2)=\varphi(t_2)$ を満たす任意の区分的 C^1 級の関数 $\psi\colon[t_1,t_2]\to D(c;r)$ に対して、

$$\widetilde{\varphi}(t):=\begin{cases}\varphi(t) & (t\in[\alpha,t_1]\cup[t_2,\beta])\\ \psi(t) & (t\in[t_1,t_2])\end{cases}$$

とおくと、この $\widetilde{\varphi}$ の定める曲線 $\widetilde{C}$ について

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{\widetilde{C}} f(z)\,dz$$

が成り立つ。

証明.

f の定義域 Ω に含まれる任意の円盤領域 $D(c;r)$ は星型領域であるから、その中では積分路を変形しても積分の値は変わらない (定理 18.8 による)。実際、$D(c;r)$ における原始関数を F とするとき、$\varphi|_{[t_1,t_2]}$ の定める曲線 γ、ψ の定める曲線 $\tilde{\gamma}$ について

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(\psi(t_2)) - F(\psi(t_1)) = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$$

が成り立つ。 □

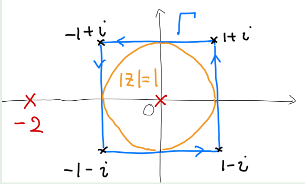
この "工事" を続けることで、Ω 内での積分路の変形がかなり自由に出来るであろう。

例 19.2 (ある年度の宿題から)

$\mathbb{C}$ で 4 点 $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する閉曲線を Γ とするとき、

$$(\heartsuit) \qquad \int_\Gamma \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}.$$

を示せ (この後、円盤における Cauchy の積分公式から、この積分の値が簡単に求まる)。

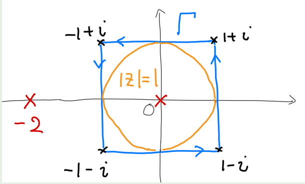


例 19.2 (ある年度の宿題から)

$\mathbb{C}$ で 4 点 $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する閉曲線を Γ とするとき、

$$(\heartsuit) \qquad \int_\Gamma \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}.$$

を示せ (この後、円盤における Cauchy の積分公式から、この積分の値が簡単に求まる)。



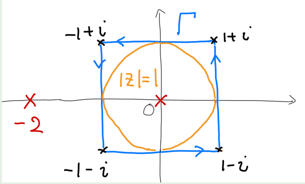
(解答)　大まかに言うと「被積分関数 $\dfrac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ で正則であり、その範囲で積分路 Γ は円周 $|z|=1$ に変形できる」ということである。

例 19.2 (ある年度の宿題から)

$\mathbb{C}$ で 4 点 $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する閉曲線を Γ とするとき、

$$(\heartsuit) \qquad \int_\Gamma \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}.$$

を示せ (この後、円盤における Cauchy の積分公式から、この積分の値が簡単に求まる)。

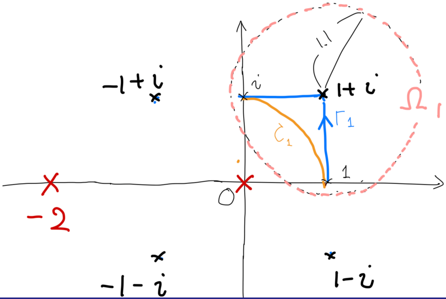


(解答)　大まかに言うと「被積分関数 $\dfrac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ で正則であり、その範囲で積分路 Γ は円周 $|z|=1$ に変形できる」ということである。

積分路変形をどう正当化するか色々なやり方がある。代表的なものを 3 つ示す。

例 19.2 (つづき)

1. 星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えて良い、という定理を使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の 4 つの段階を踏めば良い。
   例えば第 1 象限の部分は、$1+i$ を中心として、半径が 1.1 (1 より大きく、$1+i$ と 0 との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい) の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考える。Ω_1 で被積分関数は正則です (0, -2 は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれる。ゆえに、Γ_1 を C_1 に置き換えられる。
   第 2 象限 (Γ_2 を C_2), 第 3 象限 (Γ_3 を C_3), 第 4 象限 (Γ_4 を C_4) でも同様。

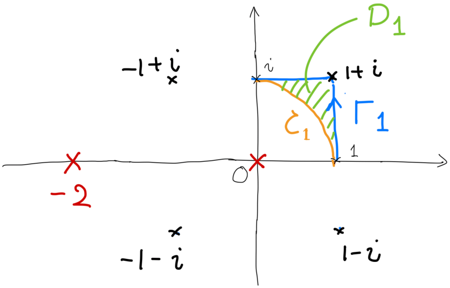


例 19.2 (つづき)

2. 各 j に対して、$\Gamma_j - C_j$ は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いた Cauchy の積分定理 (第 17 回授業参照) から

$$\int_{\Gamma_j} f(z)dz - \int_{C_j} f(z)dz = \int_{\partial D_j} f(z)dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z)dz = \int_{C_j} f(z)dz$$

とする手がある。Green の定理をちゃんと分かっているという人には、この方法は簡単に思えるかもしれない。



例 19.2 (つづき)

3. 「連続的変形」で説明されることも多い。$\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ の中で、正方形の周を円周まで連続的に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作る。(この例の場合は簡単。原点に向かって縮める感じ (図 3)。ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という定理は、講義ノートの付録 E.4 節, 定理 E.3。ちょっと背伸び？

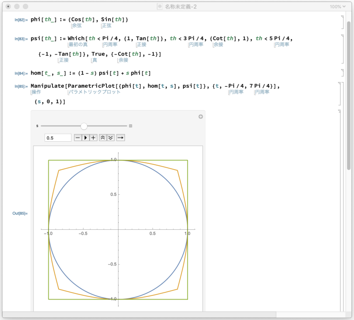


図 3: 正方形の周 Γ を円周 C に連続的に変形する

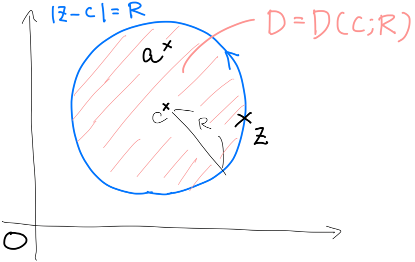
いよいよ主役 Cauchy の積分公式の登場である。まずは円盤の場合から。

定理 19.3 (円盤における Cauchy の積分公式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ とする。このとき任意の $a \in D$ に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

円周上の f の値から円盤内の点での f の値が求まる。



7.1 円盤における Cauchy の積分公式

a を変数と見る場合も多い。そのときは、積分変数 z を ζ に書き換え、a を z と書き換えて

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\quad(z\in D)$$

とすると見やすい。この等式の右辺は、何回でも積分記号下の微分が出来る (その事実の証明自体には、f が正則である必要はなく、f は連続であればよい)。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

系 19.4

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$, $D:=D(c;R)$ とおくとき $\overline{D}\subset\Omega$ とする。このとき任意の $z\in D$, $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

この定理 19.3 の証明のために補題を 2 つ用意する。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 19.5 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

補題 19.5 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

証明 $a \notin \Delta$ のときは、前と同じ証明で良い。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 19.5 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

証明　$a \notin \Delta$ のときは、前と同じ証明で良い。

$a \in \Delta$ とする。以下の 3 つのうちのいずれかが成り立つ。

1. a は Δ のある頂点
2. a は Δ のある辺上にあるが、頂点ではない
3. a は Δ の内部にある。

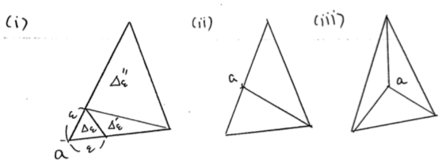


図 4: a が三角形 Δ のどこにあるかで場合分け (頂点, 頂点でない辺上, 内部)

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。a を含まない三角形 Δ'_ε, Δ''_ε では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\Delta}|f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \le 4\varepsilon \max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

$\varepsilon \to +0$ とすることで $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。a を含まない三角形 Δ'_ε, Δ''_ε では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\Delta}|f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \le 4\varepsilon \max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

$\varepsilon \to +0$ とすることで $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が 0 であることが導かれる。 □

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

三角形版 Cauchy の積分定理が一般化されたので、それを用いて証明された星型領域における Cauchy の積分定理も一般化できる。

系 19.6 (星型領域における Cauchy の積分定理の一般化)

星型領域における Cauchy の積分定理の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

三角形版 Cauchy の積分定理が一般化されたので、それを用いて証明された星型領域における Cauchy の積分定理も一般化できる。

系 19.6 (星型領域における Cauchy の積分定理の一般化)

星型領域における Cauchy の積分定理の仮定の条件「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則」を「$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$(\exists a \in \Omega)$ f は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

証明　もともとの f が正則という仮定は、定理 18.8 の中で、$F(z) = \displaystyle\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$ が

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta$$

を満たすことの証明に使った。そこで三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) を用いたが、それが微分可能性を仮定しない点 (ただしその点での連続性は仮定) の存在を許せることが分かった。 □

次を定理 19.3 の証明で用いる。

補題 19.7 (とても重要な線積分)

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

(注意: $|c-a| = r$ とすると、積分路の途中で被積分関数の分母が 0 となるので、その場合は除外しておくことにする。)

この結果は、後で当たり前に思えるようになるが、今証明するのはちょっとした仕事である。まずは、これを認めて懸案の定理 19.3 の証明を片付けよう。

定理 19.3 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

定理 19.3 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

　十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $D(c; R + \varepsilon) \subset \Omega$. $|z - c| = R$ を C とおくと、C は $D(c; R + \varepsilon)$ 内の C^1 級の閉曲線である。星型領域における Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a}\,dz - f(a) \int_C \frac{dz}{z - a}.$$

定理 19.3 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $D(c; R+\varepsilon) \subset \Omega$. $|z-c| = R$ を C とおくと、C は $D(c; R+\varepsilon)$ 内の C^1 級の閉曲線である。星型領域における Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a)\int_C \frac{dz}{z-a}.$$

$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ であるから

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz. \qquad \square$$

補題 19.7 の証明

$|c-a|>r$ のとき。(直観的には赤いバッテンが $|z-c|=r$ の外にあるので積分は 0 である。) $r<R<|c-a|$ を満たす R を取ると、$\dfrac{1}{z-a}$ は星型領域 $D(c;R)$ で正則で $|z-c|=r$ はその中にあるので、星型領域における Cauchy の積分定理により

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=0.$$

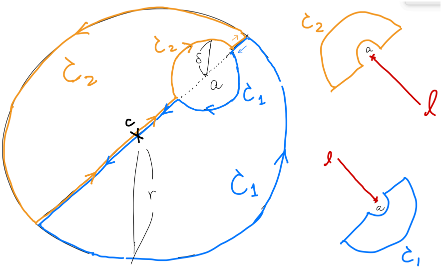
以下では、$|c-a|<r$ のときの値が $2\pi i$ であることの証明を 2 つ紹介する。

$|c-a|<r$ の場合の証明 1 — 積分路の変形を用いる　2 つの閉曲線 C_1, C_2 を図のように取る。それぞれ a を端点とする半直線の補集合に含まれるので、星型領域における Cauchy の積分定理によって、$\dfrac{1}{\zeta-a}$ の積分は 0 である。これから

$$0=0+0=\int_{C_1}\frac{dz}{z-a}+\int_{C_2}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}-\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}=2\pi i. \quad \square$$



7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 19.8 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 19.8 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 19.8 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 19.8 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f_n(z)-f(z)|\,|dz| \le \max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C |dz|.$$

最後の $\displaystyle\int_C |dz|$ は C の弧長である (n によらない有限の数)。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

別証明をするために、補題として次の定理 (それ自身重要) を準備する。

定理 19.8 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していなかった (本質的には同じ証明である)。

証明 f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz-\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C|f_n(z)-f(z)|\,|dz|\le\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C|dz|.$$

最後の $\displaystyle\int_C|dz|$ は C の弧長である (n によらない有限の数)。

$\{f_n\}$ が C^* で f に一様収束とは、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|=0$ を意味するので、

$$\int_C f_n(z)\,dz\to\int_C f(z)\,dz\quad(n\to\infty).\qquad\square$$

補題 19.7 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

補題 19.7 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|$ 公比 $|=\left|\dfrac{a-c}{z-c}\right|=\dfrac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。

補題 19.7 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|$ 公比 $|=\left|\frac{a-c}{z-c}\right|=\frac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。ゆえに命題 19.8 より項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz.$$

すでに何度か見たように、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}=2\pi i\delta_{n0}$ であるから、$n=0$ の項のみ残り

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i. \quad \square$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 19.7 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|\text{公比}|=\left|\frac{a-c}{z-c}\right|=\frac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。ゆえに命題 19.8 より項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz.$$

すでに何度か見たように、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}=2\pi i\delta_{n0}$ であるから、$n=0$ の項のみ残り

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i. \qquad \square$$

補題 19.7 に対して、積分路の方を変形する証明 (前回)、被積分関数を変形する証明 (このスライド)、2 つの証明を見せた。

参考文献

[1] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談復刻版」として復刻されている。また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。

[2] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf` (2014〜).