

複素関数・同演習 第 18 回

～Cauchy の積分定理 (2)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021 年 11 月 30 日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Cauchy の積分定理 (続き)
 - 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が 0
 - 単連結領域, 星型領域
 - 単連結領域
 - 凸領域, 星型領域
 - 星型領域における Cauchy の積分定理
- 3 参考文献

- 原始関数が存在するための条件を考察する。星型領域、単連結領域の概念を紹介し、これらの領域では、Cauchy の積分定理が成り立つ (正則関数の閉曲線に沿う線積分がつねに 0 となる) ことを、前者については証明し、後者については「お話しする」。(講義ノート [1] の§6.3, 6.4, 6.5 … このスライドとは番号 1 つズレています。)
- 宿題 9 を出します (メ切は 12 月 7 日 13:30)。

(この講義での) 記号の約束

記号の約束: $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、 $[a, b]$ を次の2つの意味で使う。

- ① \mathbb{C} の部分集合 $\{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$.
要するに a と b を端点とする線分である。
- ② 曲線 $z = \varphi(t) := (1-t)a + tb$ ($t \in [0, 1]$). 例えば $\int_{[a,b]}$ と書くとき
など。 a が始点、 b が終点となる。

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が0

Cauchy の積分定理の結論部分は、

$$\text{任意の区分的 } C^1 \text{ 級閉曲線 } C \text{ に沿う線積分が } 0: \int_C f(z) dz = 0$$

という条件だった。一方で「 f が原始関数を持てば」これが成り立つことを知っている ($\int_C f(z) dz = F(\text{終点}) - F(\text{始点}) = 0$)。何か関係があるのだろうか？

Ω を \mathbb{C} の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続とするとき、以下の3つの条件の関係について調べよう。

- Ⓐ f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
- Ⓑ Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ
- Ⓒ f は Ω で正則である

すでに (i) \Rightarrow (ii) は知っているが、実は逆 (ii) \Rightarrow (i) も成り立つ。証明は難しくないで、このすぐ後で述べる (命題 18.2)。

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が0

さらに、実は (i) \Rightarrow (iii) である。

それは *Cauchy* の積分公式 (まだ説明していない) を用いて得られる「正則ならば、各点の近傍で冪級数展出来る」という定理 (後で証明するこの講義の重要な目標) から、 F は何回でも微分できることが分かるので、特に F が2回微分可能であることから、 $f = F'$ も微分できるからである。

上に述べたように (i) と (ii) は同値なので、(ii) \Rightarrow (iii) も成り立つ。すなわち「 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つならば、 f は Ω で正則である。」これは通常 **Morela** の定理と呼ばれる。

(これは既に言っていることだが) (iii) \Rightarrow (ii) は一般には成り立たない。これは $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$ という例から分かる。

ここまですべてをまとめると、

(i) と (ii) は同値で (iii) より強い

(iii) に条件を足して (ii) を導くのが *Cauchy* の積分定理である、と考えられる。

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が0

Ω に何か $+\alpha$ の条件をつけると (iii) \Rightarrow (ii) が言えて、すべて同値になる。

定理 18.1 (単連結領域における Cauchy の積分定理 とても有名)

Ω は \mathbb{C} の単連結あるいは星型の領域とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする。このとき Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

(単連結、星型の定義は後述する。) これから

星型領域や単連結領域に対しては、(i), (ii), (iii) は同値である

単連結の場合は特に有名であるが、厳密な証明には少し手間がかかる (講義ノート [1] の **E** 節に載せてある。証明のアイディアは、この講義でも少しずつ紹介してゆく。)

星型の場合は比較的簡単に証明できて (本日後半)、その定理だけで関数論の多くの重要な結果が導くことが出来る。

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が0

余談 1 (ベクトル解析を勉強した人に)

実は、ベクトル解析にも、これとよく対応する話がある。

(i) が「ベクトル場 \mathbf{f} がポテンシャルを持つ」、(ii) が $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$, (iii) が $\text{rot } \mathbf{f} = 0$, ということになる。

(i) と (ii) は同値である。(i) (あるいは (ii)) から (iii) が導かれるが、逆は一般には成り立たず、単連結領域であれば逆も成立する、というのは同じである。 □

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が0

では (ii) \Rightarrow (i) を証明しよう。

定理 18.2 (任意の区分的 C^1 級閉曲線に沿う線積分が0ならば原始関数を持つ)

Ω は \mathbb{C} の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つとする。このとき、ある正則関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $F' = f$ 。

証明 Ω 内の任意の点 a を取る。 Ω が弧連結であるから、任意の $z \in \Omega$ に対して、 a を始点、 z を終点とする Ω 内の区分的に C^1 級の曲線 C_z が存在する。

$$F(z) := \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta$$

とおく。

$F(z)$ の値は C_z の取り方にはよらない。実際、 a を始点、 z を終点とする Ω 内の2曲線 C_z, C'_z があるとき、 $C := C_z + (-C'_z)$ とおくと、 C は閉曲線であるので、仮定 (条件 (ii)) から

$$0 = \int_C f(\zeta) d\zeta = \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{C'_z} f(\zeta) d\zeta \quad \text{ゆえに} \quad \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{C'_z} f(\zeta) d\zeta$$

が成り立つからである。

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が 0 証明続き

この F が f の原始関数であることを示す。

任意の $z \in \Omega$ に対して、 $(\exists \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \subset \Omega$. ゆえに $|h| < \varepsilon$ を満たす任意の h に対して、 z から $z+h$ に向かう線分 $[z, z+h]$ は Ω に含まれる。 C_{z+h} とし $C_z + [z, z+h]$ を選ぶことにより、

$$(1) \quad F(z+h) - F(z) = \int_{C_z + [z, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

6.4 原始関数が存在 \Leftrightarrow 任意の閉曲線に沿う線積分が 0 証明続き

一方

$$\int_{[z, z+h]} d\zeta = [\zeta]_{\zeta=z}^{\zeta=z+h} = h$$

であるから、 $h \neq 0$ とするとき

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta - f(z) \cdot \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \int_{[z, z+h]} |d\zeta| \\ &= \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

f は z で連続であるから、 $h \rightarrow 0$ のとき右辺 $\rightarrow 0$. ゆえに $F'(z) = f(z)$. \square

6.5 単連結領域, 星型領域 6.5.1 単連結領域

単連結、星型という言葉を知ろう。

定義 18.3 (単連結領域)

Ω を \mathbb{C} (あるいは \mathbb{R}^n) の領域とする。 Ω が**単連結** (simply-connected) とは、 Ω 内の任意の閉曲線 $(z = \varphi(t) \ (t \in [\alpha, \beta])$ が Ω 内の 1 点 (定数曲線) に Ω 内で連続的に変形できることをいう。

つまり、ある $a \in \Omega$ とある連続関数 $F: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto F(t, s) \in \Omega$ が存在して

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \varphi(t) & (t \in [\alpha, \beta]), \\ F(t, 1) &= a & (t \in [\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

が成り立つ。

6.5.1 単連結領域

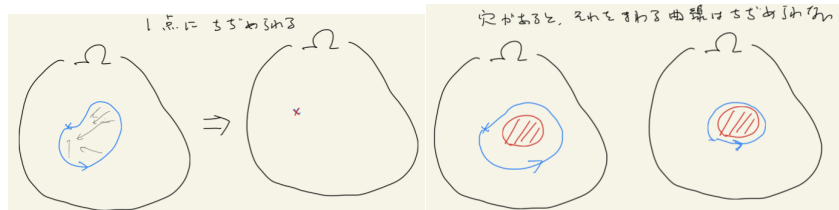


図 1: 穴がなければ閉曲線は 1 点に縮められる

図 2: 穴があれば 1 点に縮められないことがある (2 次元の場合)

例 18.4 (単連結である領域)

全空間 \mathbb{R}^n, \mathbb{C} . 球 $B(\mathbf{a}; r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$, 円盤 $D(c; r)$.

凸領域 (後述). 星型領域 (後述).

Jordan 曲線定理に基づく「平面内の単純閉曲線 (Jordan 曲線) の囲む領域」.
 $n \geq 3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ とするとき $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$.

直観的には、閉曲線が外せなくなるような障害物がない領域。 □

6.5.1 単連結領域

例 18.5 (単連結でない領域)

- (a) $a \in \mathbb{R}^2$ とするとき $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$. 同じことだけれど $c \in \mathbb{C}$ とするとき、 $\mathbb{C} \setminus \{c\}$.
- (b) $c \in \mathbb{C}, r > 0$ とするとき $D(c; r) \setminus \{c\}$.
- (c) $c \in \mathbb{C}, 0 < R_1 < R_2 < +\infty$ とするとき、 $\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$ (円環領域と呼ぶ).
- (d) ℓ を \mathbb{R}^3 内の直線とするとき $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$.
- (e) ドーナツ型の領域.

(c) の円環領域のように、直径 R_1 の穴 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq R_1\}$ が空いている場合は、1 点に縮められない閉曲線が存在することは直観的に明らかであるが、(a), (b) のように穴が 1 点である場合に、それを回る閉曲線が 1 点に縮められないことは納得行かないかもしれない。数学的に定義してあるので、証明できる。

6.5.2 凸領域, 星型領域

定義 18.6 (凸, 星型)

Ω をベクトル空間 (ここでは \mathbb{R}^n, \mathbb{C} と思えば良い) の部分集合とする。

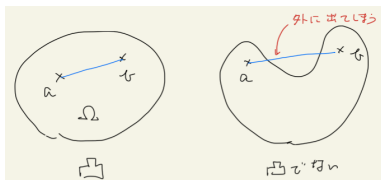
① Ω が**凸 (convex)** とは、

$$(\forall a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$

② Ω が**星型 (star-shaped)** とは、

$$(\exists a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$

(a にライトをおくと、 Ω 内のどこも照らされる、という説明をされる。)

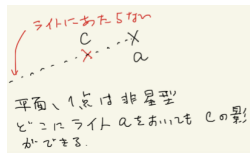
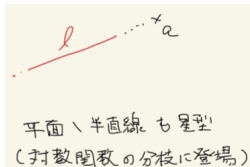
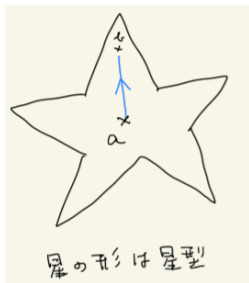


6.5.2 凸領域, 星型領域

凸領域の例としては、全空間 \mathbb{R}^n , n 次元開球

$B(\mathbf{a}; r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$ (円盤 $D(c; r)$ もこの範疇), 三角形の内部などがある。

次のスライドで述べるように凸領域は星型であるが、凸領域でない星型領域としては、星の形や、平面から半直線を除いた領域などがある。



6.5.2 凸領域, 星型領域

定理 18.7 (凸 \Rightarrow 星型 \Rightarrow 単連結)

Ω は \mathbb{R}^n または \mathbb{C} の領域で、 $\Omega \neq \emptyset$ とする。

- ① Ω が凸ならば、 Ω は星型である。
- ② Ω が星型ならば、 Ω は単連結である。

証明.

- ① Ω が凸と仮定する。 $\Omega \neq \emptyset$ であるから $a \in \Omega$ が存在する。任意の $b \in \Omega$ に対して、 Ω が凸であることから、 $[a, b] \subset \Omega$. ゆえに Ω は星型である。
- ② Ω が星型と仮定する。ある $a \in \Omega$ が存在して、任意の $b \in \Omega$ に対して $[a, b] \subset \Omega$ である。ゆえに Ω 内の任意の曲線 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して、

$$F(t, s) := sa + (1 - s)\varphi(t) \quad (s \in [0, 1], t \in [\alpha, \beta])$$

とおくと、 $F(t, s) \in [a, \varphi(t)] \subset \Omega$. ゆえに $F: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ である。さらに F は連続で、

$$F(t, 0) = \varphi(t), \quad F(t, 1) = a \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

つまり曲線 C は連続的に定数曲線 a に変形できる。ゆえに Ω は単連結である。

おまけ Mathematica で曲線の連続的変形を見る

単連結性の説明で、曲線の連続的変形を持ち出した。実例を Mathematica を使って見
てみよう。

ターミナルで 20201130.nb を入手

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/20211130.nb
```

この 20211130.nb では、ハイポサイクロイド

$$\mathbf{x} = \varphi(t) = \left((a-b) \cos t + b \cos \frac{(b-a)t}{b}, (a-b) \sin t + b \sin \frac{(b-a)t}{b} \right) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

をエピサイクロイド

$$\mathbf{x} = \psi(t) = \left((a'+b') \cos t - b' \cos \frac{(a'+b')t}{b'}, (a'+b') \sin t - b' \sin \frac{(a'+b')t}{b'} \right) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

に、

$$F(t, s) = (1-s)\varphi(t) + s\psi(t) \quad ((t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1])$$

というホモトピー写像で変形している (曲線は何でも良く、選択に深い意味はない)。

アニメーション: <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/homotopy.gif>

6.6 星型領域における Cauchy の積分定理

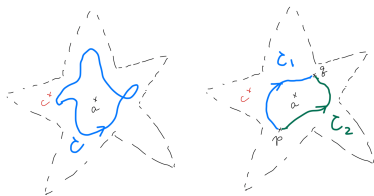
目標は単連結領域における Cauchy の積分定理であるが、まず星型領域バージョンを証明する。これは単連結領域の場合の証明の基礎にもなる。

定理 18.8 (星型領域における Cauchy の積分定理)

Ω は \mathbb{C} の星型領域 (例えば円盤領域)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則 (あるいは、ある 1 点 c を除いた $\Omega \setminus \{c\}$ で正則で、 Ω で連続) とするとき、 f の原始関数が存在する。

ゆえに Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z) dz = 0$ 。

また任意の $p, q \in \Omega$ に対して、 p, q をそれぞれ始点、終点とする Ω 内の任意の区分的 C^1 級曲線 C_1, C_2 に対して、 $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ が成り立つ。



まず f が Ω 全体で正則な場合に証明する (例外点 c の存在を許す一般の場合は次回)。

6.6 星型領域における Cauchy の積分定理 証明

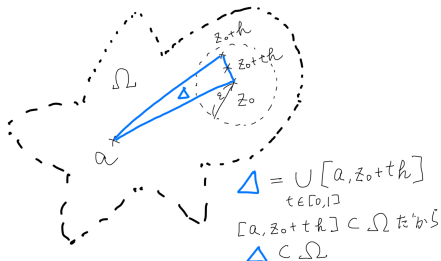
証明 Ω は星型であるから、ある $a \in \Omega$ が存在して、 $(\forall z \in \Omega) [a, z] \subset \Omega$. そこで

$$F(z) := \int_{[a, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (z \in \Omega)$$

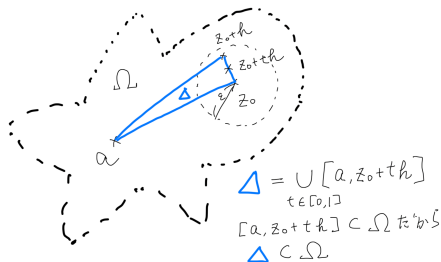
とおくと、次式が成り立つ:

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{[z_0, z_0 + h]} f(\zeta) d\zeta.$$

実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$. $0 < |h| < \varepsilon$ を満たす任意の $h \in \mathbb{C}$ に対して、 $z_0 + h \in D(z_0; \varepsilon)$. $a, z_0, z_0 + h \in \Omega$ であるが、この3点を頂点とする三角形 Δ は $\Delta \subset \Omega$ を満たす。 ($\because \Delta = \bigcup_{t \in [0, 1]} [a, z_0 + th]$ であるが、
 $z_0 + th \in D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ であるから、星型の条件を用いて $[a, z_0 + th] \subset \Omega$.)



6.6 星型領域における Cauchy の積分定理 $\Delta \subset \Omega$



$\partial\Delta = [a, z_0] + [z_0, z_0+h] + [z_0+h, a]$ について、三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim の定理) から $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$. すなわち

$$\int_{[a, z_0]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

ゆえに

$$F(z_0+h) - F(z_0) = \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

6.6 星型領域における Cauchy の積分定理 証明 続き

この後は、定理 18.2 の証明と同様にして $F'(z_0) = f(z_0)$ が示せる。

念のため書いておく：

$$\begin{aligned}\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta - f(z_0) \cdot \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta.\end{aligned}$$

これから $h \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| &\leq \max_{\zeta \in [z_0, z_0+h]} |f(\zeta) - f(z_0)| \frac{1}{|h|} \int_{[z_0, z_0+h]} |d\zeta| \\ &= \max_{\zeta \in [z_0, z_0+h]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0.\end{aligned}$$

これは $F'(z_0) = f(z_0)$ であることを示している。

□

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).