複素関数・同演習 第17回

〜Cauchy の積分定理 (1)〜

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年11月24日

目次

本日の内容・連絡事項

- 11 月 16 日 (火曜) の複素関数の授業を収録した動画の公開が、私の手違いで遅れてしまいました。ごめんなさい。今後は 16 時までに公開するように努めます。こちらでもチェックしますが、万一公開されていないようでしたらメールで指摘して下さい。
- Cauchy の積分定理 (講義ノート [1] の§6) の第 1 回。「三角形 Δ を含む開集合で正則な f に対して、$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$」という定理を証明します。定理自体も証明も非常に有名で、エッセンスが詰まっています。関数論のハイライトの一つ。対面でやりたかった。
- 宿題 8 の解説をします (動画公開は 11 月 24 日 10:50 以降)。
- 今週は宿題を出さないことにします。

6 Cauchy の積分定理

いよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くことにする。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的に分かる形で説明して、三角形の周の場合 (Goursat-Pringsheim の定理) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

(a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則 (Ω の任意の点で微分可能)。

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

ⓐ f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則 (Ω の任意の点で微分可能)。

ⓑ C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式 [1] は簡単で

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

ⓐ f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則 (Ω の任意の点で微分可能)。

ⓑ C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

ⓒ C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

再掲

- ⓐ f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- ⓑ C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意

- ⓒ C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad \left(\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi])\right)$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

再掲

- (a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
  以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad \left(\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi])\right)$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\},\ f(z)=\frac{1}{z},\ C\colon z=e^{i\theta}\ (\theta\in[0,2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界であることが分かるので、C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具 (？) はあまり使いたくない。C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は 2 つある。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界であることが分かるので、C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具 (？) はあまり使いたくない。C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は 2 つある。

(i) Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える (そうすれば Ω 内の任意の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「Ω が $\mathbb{C}$ の単連結領域であれば、Ω で正則な任意の関数 f と、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。

6.1 はじめに

この枠内に書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界であることが分かるので、C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具 (？) はあまり使いたくない。C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は 2 つある。

(i) Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える (そうすれば Ω 内の任意の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「Ω が $\mathbb{C}$ の単連結領域であれば、Ω で正則な任意の関数 f と、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。

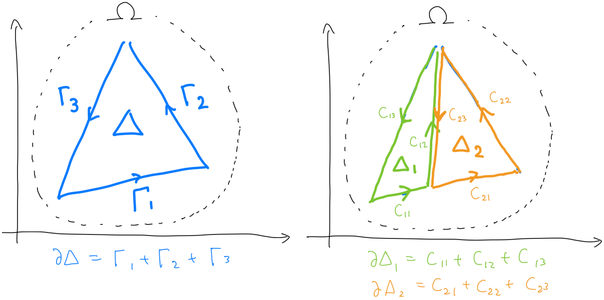
(ii) 閉曲線 C が 1 つの点を囲む、という条件をうまく定義してから、とりかかる。閉曲線の点の周りの**回転数**という概念を使うことになる。それを使って「囲む」を定義する。⋯ 残念ながら、この講義ではこれらを説明する時間が (多分) ない。

いずれにしても単純な場合から話を進めていく。

6.2 準備

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

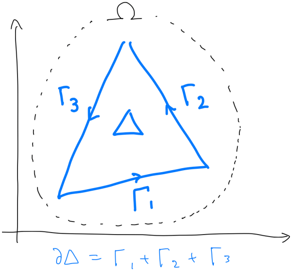
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz. \tag{1}$$

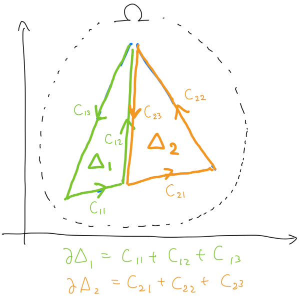


6.2 準備

Ω は ℂ の開集合、$f: \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

(1)
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz.$$





実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z)\,dz = \int_{-C_{12}} f(z)\,dz = -\int_{C_{12}} f(z)\,dz.$$

6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z)\,dz + \int_{C_{23}} f(z)\,dz = 0.$$

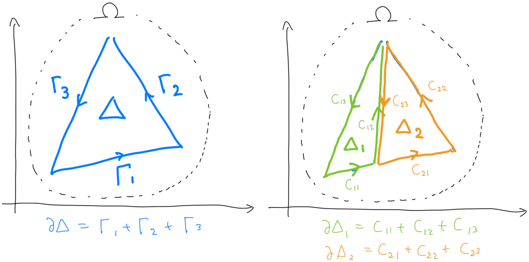
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z)\,dz + \int_{C_{23}} f(z)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz &= \left(\int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}}\right) + \left(\int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}}\right)\\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}}\\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square\end{aligned}$$



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 17.1 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [2])

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

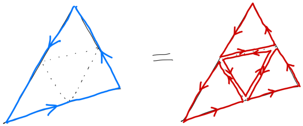
6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

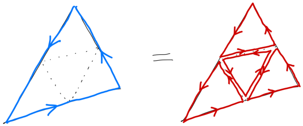
(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。

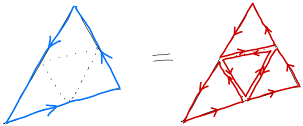


(b) 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

- (a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。

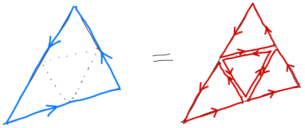


- (b) 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。
  - (i) 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az + b$ で良く近似できること

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

ⓐ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



ⓑ 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

- ⓘ 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az+b$ で良く近似できること
- ⓘⓘ 1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\displaystyle\int_{\text{閉曲線}}(az+b)dz=0.$

  実際 $\left(\frac{az^2}{2}+bz\right)'=az+b$ であり、1 次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M=0$ を示したい。
$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j = 1, 2, 3, 4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M=0$ を示したい。
$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j=1,2,3,4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$M = \left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|.$$

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M=0$ を示したい。
$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j=1,2,3,4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$M = \left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|.$$

右辺の 4 つの項 $\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j^*} であったとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M \le 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (2)

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (2)

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割&選択を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ:

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (2)

ゆえに
$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$
以下、同様にして三角形の分割&選択を続ける:
$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$
このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ:
$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}.$$
区間縮小法の原理により
$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}\,.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (2)

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割&選択を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ:

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}\,.$$

$c \in \Delta_0 = \Delta \subset \Omega$ であることに注意する。

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c) + f'(c)(z - c)\right) dz = 0.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (3)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \big(f(c)+f'(c)(z-c)\big)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \left[f(z) - \big(f(c)+f'(c)(z-c)\big)\right] dz.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (3)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right) dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \left[f(z) - \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right)\right] dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\, dz\right| \le \max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|\,.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (3)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right) dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \left[f(z) - \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right)\right] dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\, dz\right| \le \max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|.$$

この $\displaystyle\int_{\partial\Delta_n} |dz|$ は $\partial\Delta_n$ の弧長である。それを L_n とおくと、Δ_n は Δ と相似であり、n が 1 増えるごとに、長さが 1/2 倍になるから、$L_n = \dfrac{L}{2^n}$ が成り立つ。ただし、L は $\partial\Delta = \partial\Delta_0$ の弧長である。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (4)

微分の定義 $\displaystyle\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (4)

微分の定義 $\displaystyle\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\,.$$

$z,c\in\Delta_n$ であれば、$|z-c|\le L_n$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon L_n.$$

微分の定義 $\displaystyle\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\,.$$

$z,c\in\Delta_n$ であれば、$|z-c|\le L_n$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n}\le\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\varepsilon L_n\cdot L_n=\frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

であるから、

$$0\le M\le\varepsilon L^2.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (4)

微分の定義 $\displaystyle\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\,.$$

$z,c\in\Delta_n$ であれば、$|z-c|\le L_n$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n}\le\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\varepsilon L_n\cdot L_n=\frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

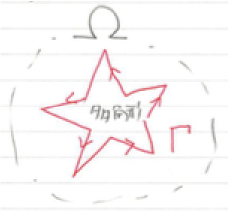
であるから、

$$0\le M\le\varepsilon L^2.$$

ε は任意の正の数であったので、$M=0$. □

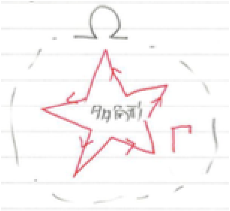
定理 17.1 とその証明から すぐ or 直観的に 分かること

ⓐ Ω に含まれる任意の “多角形” P の周 $\Gamma := \partial P$ に沿う線積分 $\int_\Gamma f(z)\,dz$ も 0.



定理 17.1 とその証明から すぐ or 直観的に 分かること

(a) Ω に含まれる任意の "多角形" P の周 $\Gamma := \partial P$ に沿う線積分 $\int_\Gamma f(z)\,dz$ も 0.



実際、多角形は三角形に分割でき、各三角形の周に沿う線積分は (上の Lemma から) 0. これを全部加えると $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

- ⓑ Ω の中にある領域 D の境界が区分的に C^1 級の閉曲線であるとき、D の中に穴はない (ここは曖昧だけど「直観的」なので) とすると $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$

図 1: D 内に穴がない

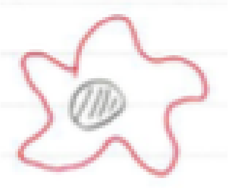


図 2: D 内に穴がある

- Ω の中にある領域 D の境界が区分的に C^1 級の閉曲線であるとき、D の中に穴はない (ここは曖昧だけど「直観的」なので) とすると $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

図 1: D 内に穴がない

図 2: D 内に穴がある

証明もどき

D を細かく分割する: $D = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} D_k$. $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} f(z)\,dz$.
∂D より離れた D_k は三角形が選べて、その周 ∂D_k に沿う線積分は 0.
∂D に近い D_k は三角形が選べないが、Ω 内のある円盤 $D(c;\varepsilon)$ に含まれるように細かく分割しておけば、$F(z) := \displaystyle\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ $(z \in D(c;\varepsilon))$ が原始関数になる (詳細は来週)。だから線積分は 0.

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

余談: 有名な別証明 ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz &= \int_{\partial\Delta} (u + iv)(dx + i\, dy) = \int_{\partial\Delta} (u\, dx - v\, dy) + i \int_{\partial\Delta} (v\, dx + u\, dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y) dx\, dy + i \iint_\Delta (u_x - v_y) dx\, dy. \end{aligned}$$

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y)dx\,dy.\end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y)dx\,dy.\end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。ゆえに

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \iint_\Delta 0\,dx\,dy + i\iint_\Delta 0\,dx\,dy = 0. \quad \square$$

上の論法が成立するには、f' の連続性を仮定する必要がある [2]。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、Green の定理に十分慣れていれば [3] 色々な議論が単純になるので、魅力的に感じられるかもしれない。

実は教科書 (神保 [3]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [4] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

[2] テキストによっては、関数が正則であることの定義を、微分可能かつ導関数が連続という条件を満たすこととしている。

[3] 残念ながら、そういうカリキュラムを採用している学科は稀にしかないでしょう。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).

[3] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[4] 堀川穎二(えいじ)：複素関数論の要諦, 日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).