複素関数・同演習 第16回
～線積分 (2)～

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年11月17日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回に引き続き、複素線積分 $\int_C f(z)\,dz$ の性質を説明する (講義ノート [1] の§5)。

  次回予告: いよいよ Cauchy の積分定理の説明を始める。
- 宿題 8 が出ています。昨日の複素関数で〆切は 11 月 23 日 13:30 と言いましたが、祭日のため大学がお休みですね。11 月 24 日 10:50 に変更します。

5.1 線積分の定義 (続き)

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

定理 16.1 (微積分の基本定理、のようなもの)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F' = f$)、C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a). \tag{1}$$

が成り立つ。ただし、a, b はそれぞれ C の始点、終点である。

((1) の右辺を、$[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

5.1 線積分の定義 (続き)

証明　C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt$$
$$=[F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1},t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級}.$$

このとき

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\sum_{j=1}^m\left(F(\varphi(t_j))-F(\varphi(t_{j-1}))\right)$$
$$=F(\varphi(t_m))-F(\varphi(t_0))=F(b)-F(a).$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

5.1 線積分の定義 (続き)

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な 1 変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$\left(\because F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x)\right)$$

は成り立つが、

連続な 1 変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$.)

前回最後の 2 つの例を見直してみる。

例 16.2 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 15.4 再訪)

$f(z)=z^2$, $C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とする。$F(z):=\dfrac{z^3}{3}$ は $F'=f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1}=\frac{(-1)^3-1^3}{3}=-\frac{2}{3}\quad\text{(もちろん前の計算と一致).}$$

例 16.3 (原始関数が存在しない例　例 15.5 再訪)

(前半) $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $(z\in\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\})$ とする。f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、$C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z)\,dz=[F(z)]_{z=1}^{z=1}=F(1)-F(1)=0.$$

ところが前回見たように $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。

5.1 線積分の定義 (続き)

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大事である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{Arg} z$, $\overline{z}$ は原始関数を持たない。

5.1 線積分の定義 (続き)

例 16.3 (原始関数が存在しない例 (つづき)　例 15.5 再訪)

(後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。$F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、$F'(z) = \dfrac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon \colon z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon}$$
$$= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i.$$

$\varepsilon \to +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ に一致するのはもっともらしい。

原始関数が存在しない場合は、例えば例 15.4, 15.5 でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 16.4 (原始関数の存在しない例)

$C\colon z=(1+2i)t$ $(t\in[0,1])$ とする。$f(z)=|z|$ は原始関数を持たない。

$$\int_C |z|\,dz=\int_0^1\sqrt{t^2+(2t)^2}\cdot(1+2i)\,dt=(1+2i)\sqrt{5}\int_0^1|t|\,dt$$
$$=(1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 t\,dt=\frac{(1+2i)\sqrt{5}}{2}.\quad\square$$

曲線のいろは　Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ 連続) とする。

1. $\varphi([\alpha,\beta])=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ を **C の像**または**跡**と呼び、C^* と表す。
2. C が **C^1 級**とは、φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、φ' が連続) であることをいう。
3. C が **C^1 級正則**とは、C が C^1 級かつ $(\forall t\in[\alpha,\beta])$ $\varphi'(t)\neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
4. C が**区分的 C^1 級**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。
5. C が**区分的 C^1 級正則**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t)\neq 0$ (ただし $t=t_{j-1},t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

5.2 曲線に関する用語の定義

6. C が**閉曲線**とは、$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であることをいう。
7. C が**単純** (Jordan arc) $\Leftrightarrow$ 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha,\beta)$ で単射であることをいう。
   要するに「自分自身と交わらない」こと。
8. 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** $\Leftrightarrow$ 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理**「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を 2 つの領域 (一方は有界、もう一方は非有界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 16.5 (円周)

$C\colon z=c+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ は、C^1 級正則単純閉曲線である。C の像は中心 c, 半径が r の円周で、C は正の向きである。単に $|z-c|=r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

例 16.6 (正方形の周)

図の正方形の周。

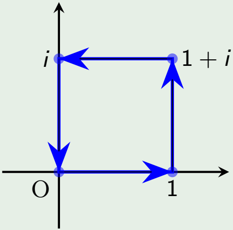

図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C\colon z=\varphi(t):=\begin{cases} t & (t\in[0,1]) \\ 1+i(t-1) & (t\in[1,2]) \\ 1+i-(t-2) & (t\in[2,3]) \\ i-i(t-3) & (t\in[3,4]) \end{cases}$$

このとき、$C^*=$ 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。 □

定義 16.7 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 C_1+C_2)

1. 逆向きの曲線 $-C$: $z=\varphi(-t)$ $(t\in[-\beta,-\alpha])$
2. C_1 の終点$=C_2$ の始点のとき。C_1+C_2 を次のように定義する。

$$\varphi(t):=\begin{cases}\varphi_1(t) & t\in[\alpha_1,\beta_1]\\ \varphi_2(t-\beta_1+\alpha_2) & t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2]\end{cases}$$

教科書は C_2C_1 と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では C_1+C_2 と表す (その方がふつう)。後で終点=始点でない場合にも使う。

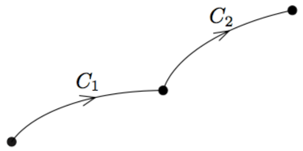

図 2: C_1 の終点 $=$ C_2 の始点ならば C_1+C_2 が作れる

定理 16.8 (線積分の性質)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、$\lambda \in \mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

1. $\displaystyle\int_C (f(z) + g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$
2. $\displaystyle\int_C \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_C f(z)\,dz.$
3. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$ (前回説明済みであるが).
4. $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$
5. $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

5.3 線積分の性質

証明　(1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

3. 一般に連続関数 $F\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ に対して,

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

が成り立つことを認めれば、$F(t)=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ について適用して、

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt = \int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

4. $z=\varphi(-t)$ $(t\in[-\beta,-\alpha])$ とすると、$dz=-\varphi'(-t)dt$ であるから、

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t))\cdot(-\varphi'(-t))dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t)\,dt.$$

$s=-t$ とおくと、$t=-\alpha$ のとき $s=\alpha$, $t=-\beta$ のとき $s=\beta$, $dt=-ds$ であるから、

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\cdot(-1)ds = -\int_C f(z)\,dz. \qquad \square$$

注意 16.9

孤長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\ ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|. \quad \square$$

定理 16.10

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 $\square$

例 16.11

次の 5 つの曲線について考える。

$C_1\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0,\pi])$
$C_2\colon z = e^{i\pi t}\ (t \in [0,1])$
$C_3\colon z = e^{i\pi t^2}\ (t \in [0,1])$
$C_4\colon z = -t + i\sqrt{1-t^2}\ (t \in [-1,1])$
$C_5\colon z = t + i\sqrt{1-t^2}\ (t \in [-1,1])$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である:

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \quad (j = 1,2,3,4,5).$$

$j = 1, \cdots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、$C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\displaystyle\int_{C_j} f(z)\,dz$ の値は皆同じであり、$\displaystyle\int_{C_5} f(z)\,dz = -\int_{C_4} f(z)\,dz$ であることが分かる。

例 16.11 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

(2)
$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta}\,d\theta.$$

(2) で、$\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t}\,dt = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

(2) で、$\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^t}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot 2\pi ie^{i\pi t^2}\,dt = \int_{C_3} f(z)\,dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\int_{C_4} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$ であることを示せ。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).