

# 複素関数・同演習 第 15 回

## ～対数関数と冪関数 (3), 線積分～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021 年 11 月 16 日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 対数関数と冪関数
  - 複素対数関数
  - 冪関数 (power function)  $z^\alpha$
  - 初等関数ワールド
- 3 線積分
  - 線積分の定義
- 4 参考文献

- 前回定義した複素対数関数を用いて、複素冪関数 ( $z^\alpha$ ) や複素逆三角関数の定義を述べる。これで §4 を終えて、「§5 線積分」に入る。今回は複素線積分の定義を述べる (講義ノート [1] の§5)。
- 宿題 7 の解説をします。
- 宿題 8 を出します (締め切りは 11 月 23 日 13:30)。授業中に説明しますが、念のため

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/memo-toi8.pdf>

に書いておきます。

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数  $a, b$  について、 $a^b$  がつねに定義されるわけではなかった。 $a < 0$  かつ  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  のときは  $a^b$  を考えないのが普通である。

「そうだったっけ?」「 $(-1)^\pi$  の値は?」これは答えに詰まるのが正しい。高校では定義されていない。

$a > 0$  のときは、次式が成り立つ。

$$(1) \quad a^b = e^{b \log a}.$$

この関係 (1) を用いて、冪関数を複素関数に拡張する。

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

後で冪関数を  $z^\alpha$  と書くことになるが、しばらく  $p(z, \alpha)$  と書くことにする。(  $\alpha \in \mathbb{Z}$  のとき、 $z^\alpha$  を定義済み。それとの衝突を避けるため。 )

$$(2) \quad p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z}.$$

この  $\log$  として、 $\log$  (無限多価),  $\log$  (分枝),  $\text{Log}$  (主値) など色々考えられる。

しばらく多価関数の

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}; \text{ただし } z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in \mathbb{R} \text{ とする})$$

を使う (可能な値をすべて考察する、ということ)。

$$p(z, \alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n \alpha}.$$

簡単のため、まず  $\alpha \in \mathbb{R}$  の場合を調べる。このとき

$$(3) \quad |p(z, \alpha)| = r^\alpha \quad \text{すなわち} \quad (|z^\alpha| = |z|^\alpha).$$

$\alpha$  で場合分けする (整数、整数でない有理数、無理数)。

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

(前のスライドから)  $p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n \alpha}$ .

Ⓐ  $\alpha \in \mathbb{Z}$  のとき、 $n\alpha \in \mathbb{Z}$ . ゆえに  $e^{2\pi i n \alpha} = 1$ . ゆえに

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = r^\alpha (e^{i\theta})^\alpha = (re^{i\theta})^\alpha = z^\alpha = \begin{cases} \overbrace{z \times \cdots \times z}^{\alpha \text{ 個}} & (\alpha > 0) \\ 1 & (\alpha = 0) \\ 1 / \underbrace{(z \times \cdots \times z)}_{-\alpha \text{ 個}} & (\alpha < 0). \end{cases}$$

(これまで通り、ということ。)

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

ⓑ  $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  のとき

$$(4a) \quad \alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

とすると

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

$n$  が  $\mathbb{Z}$  を動くとき、 $nq$  を  $p$  で割った余りには、 $0, 1, \dots, p-1$  すべて現れる<sup>1</sup>。ゆえに

$$\omega^{nq} = 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1},$$

$$(4b) \quad p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

これは円周  $|z| = r^\alpha$  の  $p$  等分点である。特に  $\alpha = \frac{1}{p}$  のときは、 $z$  の  $p$  乗根全体である。

---

<sup>1</sup>実際、 $p$  と  $q$  は互いに素であるから、 $(\exists k, l \in \mathbb{Z}) kp + lq = 1$ 。ゆえに任意の  $m \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  に対して、 $mkp + mlq = m$ 。ゆえに  $(ml)q$  を  $p$  で割った余りは  $m$ 。 $n := ml$  とおくと  $\omega^{nq} = \omega^{mlq} = \omega^{-mkp} \omega^m = \omega^m$ 。

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

- Ⓒ  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (つまり  $\alpha$  は無理数) のとき、 $p(z, \alpha)$  は無限個の値を持つ (証明はサボる。用途があまりなさそうなので。コンピューターで計算して納得できる…かも)。 □

まとめると (無限多価の  $\log$  を用いて  $p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z}$  とすると)

- Ⓐ  $\alpha \in \mathbb{Z}$  のとき、 $p(z, \alpha) = z^\alpha$  (普通の冪). 1 価関数である。
- Ⓑ  $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \frac{q}{p}$  (既約分数,  $p \in \mathbb{N}$ ) のとき、 $p(z, \alpha)$  は  $p$  価関数である。
- Ⓒ  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  のとき、 $p(z, \alpha)$  は無限多価関数である。

もちろん、いずれの場合も、 $p(z, \alpha) = e^{\alpha \log z}$  の  $\log$  の分枝を選ぶことで、1 価関数になる (分枝が選べる)。

今後は  $p(z, \alpha)$  を  $z^\alpha$  と書く。特に  $\alpha = \frac{1}{p}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) のとき  $\sqrt[p]{z}$  と書くことがある。多価関数と考えるのか、分枝を選んで一価関数と考えるかは case by case である。



## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

### 例 15.1 ( $\sqrt{-1}$ は何か?)

(無限多価の  $\log$  を用いて  $\sqrt{z} = p(z, 1/2) := e^{\frac{1}{2} \log z}$  とする場合)

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$  より  $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) であるから

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{(n+\frac{1}{2})\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法)  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $z = -1$  とすると、 $z = 1 \cdot e^{\pi i}$ ,  $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$  であるから

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \cdot \pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$

1つくらい  $\alpha \notin \mathbb{R}$  に対する  $z^\alpha$  を求めてみよう。

### 例 15.2 ( $i$ の $i$ 乗)

多分応用はないと思うが、 $i^i$  を求めてみよう。 $i$  の極形式は  $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$  であるから

$$\log i = \log |1| + i \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ( $a^b = e^{b \log a}$  によって)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot (2n + \frac{1}{2}) \pi i} = e^{-(2n + \frac{1}{2}) \pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## 4.2 冪関数 (power function) $z^\alpha$ おまけ

$p(z, \alpha)$  を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},  
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];  
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]  
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]  
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]  
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]  
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

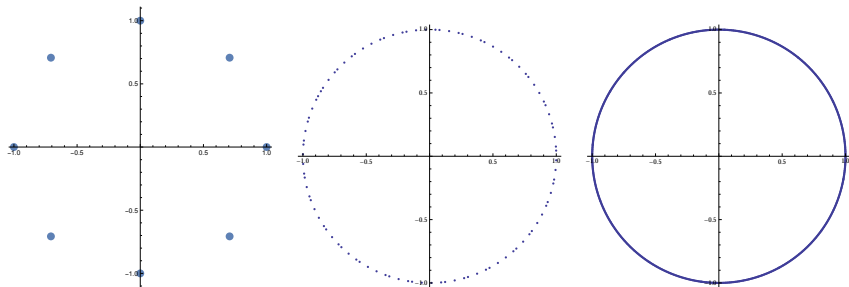


図 1:  $p(1, 1/8)$ ,  $p(1, \sqrt{2})$  (100 個),  $p(1, \sqrt{2})$  (1000 個)

## 4.3 初等関数ワールド

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned}\sin z = w &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ &\Leftrightarrow \text{途中省略} \\ &\Leftrightarrow z = -i \log \left( iw + \sqrt{1 - w^2} \right)\end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

## 4.3 初等関数ワールド おまけ

一通り書いておこう。

$$\arcsin z = \sin^{-1} z := -i \log \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\arccos z = \cos^{-1} z := i \log \left( z - i\sqrt{1 - z^2} \right) = \frac{\pi}{2} + i \log \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2} (\log(1 - iz) - \log(1 + iz)),$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \sinh^{-1} z := \log \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{arccosh} z = \cosh^{-1} z := \log \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{arctanh} z = \tanh^{-1} z := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

問 次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$(\operatorname{arcsinh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad (\operatorname{arccosh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad (\operatorname{arctanh} z)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

問 次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

## 5 線積分 5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

### 定義 15.3 (線積分)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $C : z = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) は  $\Omega$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線、 $f : C^* \rightarrow \mathbb{C}$  は連続とする。ただし  $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ 。このとき

$$(5) \quad \int_C f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とおき、 $f$  の曲線  $C$  に沿う線積分と呼ぶ。

また

$$(6) \quad \int_C f(z) |dz| := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

と定める。

## 5.1 線積分の定義

### 例 15.4

$f(z) = z^2$ ,  $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ) のとき。  $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$  であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta} d\theta \\ &= i \left[ \frac{e^{3i\theta}}{3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - e^{3 \cdot 0}) = \frac{(-1) - 1}{3} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

### 例 15.5

$f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) のとき。  $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$  であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

## 5 線積分 5.1 線積分の定義

### 注意事項

① 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実1変数関数の積分  $\int_a^b f(x) dx$  のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

②  $\varphi$  は区分的に  $C^1$  級であるから

$(\exists \{t_j\}_{j=0}^m) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \wedge$  各小区間  $[t_{j-1}, t_j]$  で  $\varphi$  は  $C^1$  級。

$t_j$  において  $\varphi$  の片側微分係数は存在するが、微分係数  $\varphi'(t_j)$  は存在しないことがありうる。

$$\int_C f(z) dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。



## 5.1 線積分の定義

- ⑧  $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$  は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$(7) \quad \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt := \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt$$

のように定義しても良い (ただし  $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$ ,  $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$ )。

$\alpha < \beta$  であれば

$$(8) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left| \sum_j F(t_j) \Delta t_j \right| \leq \sum_j |F(t_j)| \Delta t_j$$

から証明出来る。(7) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

## 5.1 線積分の定義

④ (とても良く使う。)

$$(9) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

実際、 $C$  が  $z = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) とすると

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t)) \varphi'(t)| dt$$

と書き換えられるが、これは (8) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in C^*} |f(z)| \int_C |dz| = \max_{z \in C^*} |f(z)| \times (C \text{ の弧長})$$

と評価することになる。

**注**  $C^* = C$  の跡 =  $\varphi$  の値域 = Image  $\varphi = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$  である。

**注** 定義より  $\int_C |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt$  であるから、これは  $C$  の弧長である。

## 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).