複素関数・同演習 第15回

～対数関数と冪関数 (3), 線積分～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年11月16日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回定義した複素対数関数を用いて、複素冪関数 (z^{α}) や複素逆三角関数の定義を述べる。これで §4 を終えて、「§5 線積分」に入る。今回は複素線積分の定義を述べる (講義ノート [1] の§5)。
- 宿題 7 の解説をします。
- 宿題 8 を出します (締め切りは 11 月 23 日 13:30)。授業中に説明しますが、念のため

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/memo-toi8.pdf`

  に書いておきます。

4.2 冪(べき)関数 (power function) z^α

まず、高校数学の復習から始めよう。

4.2 冪（べき）関数 (power function) z^{α}

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。

4.2 冪（べき）関数 (power function) z^α

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。$a < 0$ かつ $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

4.2 冪(べき)関数 (power function) z^{α}

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。$a < 0$ かつ $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

「そうだったっけ？」「$(-1)^{\pi}$ の値は？」これは答えに詰まるのが正しい。高校では定義されていない。

4.2 冪（べき）関数 (power function) z^α

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。$a<0$ かつ $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

「そうだったっけ？」「$(-1)^\pi$ の値は？」これは答えに詰まるのが正しい。高校では定義されていない。

$a>0$ のときは、次式が成り立つ。

$$a^b = e^{b\log a}. \tag{1}$$

4.2 冪（べき）関数 (power function) z^{α}

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。$a < 0$ かつ $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

「そうだったっけ？」「$(-1)^{\pi}$ の値は？」これは答えに詰まるのが正しい。高校では定義されていない。

$a > 0$ のときは、次式が成り立つ。

$$a^b = e^{b \log a}. \tag{1}$$

この関係 (1) を用いて、冪関数を複素関数に拡張する。

4.2 冪関数 (power function) z^α

後で冪関数を z^α と書くことになるが、しばらく $p(z,\alpha)$ と書くことにする。($\alpha\in\mathbb{Z}$ のとき、z^α を定義済み。それとの衝突を避けるため。)

$$p(z,\alpha):=e^{\alpha\log z}. \tag{2}$$

この log として、log (無限多価), log (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

4.2 冪関数 (power function) z^α

後で冪関数を z^α と書くことになるが、しばらく $p(z,\alpha)$ と書くことにする。($\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、z^α を定義済み。それとの衝突を避けるため。)

$$p(z,\alpha) := e^{\alpha \log z}. \tag{2}$$

この $\log$ として、$\log$ (無限多価), $\log$ (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

しばらく多価関数の

$$\log z = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z};\ \text{ただし } z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R} \text{ とする})$$

を使う (可能な値をすべて考察する、ということ)。

$$p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n\alpha}.$$

4.2 冪関数 (power function) z^α

後で冪関数を z^α と書くことになるが、しばらく $p(z,\alpha)$ と書くことにする。($\alpha\in\mathbb{Z}$ のとき、z^α を定義済み。それとの衝突を避けるため。)

$$p(z,\alpha):=e^{\alpha\log z}. \tag{2}$$

この log として、log (無限多価), log (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

しばらく多価関数の

$$\log z=\log r+i\left(\theta+2n\pi\right)\quad\left(n\in\mathbb{Z};\text{ ただし } z=re^{i\theta},\ r>0,\ \theta\in\mathbb{R}\text{ とする}\right)$$

を使う (可能な値をすべて考察する、ということ)。

$$p(z,\alpha)=e^{\alpha\log z}=e^{\alpha(\log r+i(\theta+2n\pi))}=r^\alpha e^{i\alpha\theta}e^{2\pi in\alpha}.$$

簡単のため、まず $\alpha\in\mathbb{R}$ の場合を調べる。このとき

$$|p(z,\alpha)|=r^\alpha\quad\text{すなわち}\quad(|z^\alpha|=|z|^\alpha). \tag{3}$$

4.2 冪関数 (power function) z^{α}

後で冪関数を z^{α} と書くことになるが、しばらく $p(z,\alpha)$ と書くことにする。($\alpha\in\mathbb{Z}$ のとき、z^{α} を定義済み。それとの衝突を避けるため。)

$$p(z,\alpha):=e^{\alpha\log z}. \tag{2}$$

この log として、log (無限多価), log (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

しばらく多価関数の

$$\log z=\log r+i\left(\theta+2n\pi\right)\quad (n\in\mathbb{Z};\ \text{ただし}\ z=re^{i\theta},\ r>0,\ \theta\in\mathbb{R}\ \text{とする})$$

を使う (可能な値をすべて考察する、ということ)。

$$p(z,\alpha)=e^{\alpha\log z}=e^{\alpha(\log r+i(\theta+2n\pi))}=r^{\alpha}e^{i\alpha\theta}e^{2\pi in\alpha}.$$

簡単のため、まず $\alpha\in\mathbb{R}$ の場合を調べる。このとき

$$|p(z,\alpha)|=r^{\alpha}\quad\text{すなわち}\quad(|z^{\alpha}|=|z|^{\alpha}). \tag{3}$$

α で場合分けする (整数、整数でない有理数、無理数)。

4.2 冪関数 (power function) z^α

$$(\text{前のスライドから})\quad p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n\alpha}.$$

- ⓐ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$n\alpha \in \mathbb{Z}$. ゆえに $e^{2\pi i n\alpha} = 1$. ゆえに

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = r^\alpha \left(e^{i\theta}\right)^\alpha = \left(re^{i\theta}\right)^\alpha = z^\alpha = \begin{cases} \overbrace{z \times \cdots \times z}^{\alpha\text{ 個}} & (\alpha > 0) \\ 1 & (\alpha = 0) \\ 1/\underbrace{(z \times \cdots \times z)}_{-\alpha\text{ 個}} & (\alpha < 0). \end{cases}$$

(これまで通り、ということ。)

4.2 冪関数 (power function) z^α

- ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

(4a) $$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p\ \text{と}\ q\ \text{は互いに素})$$

とすると

---

[1] 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})$ $kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^{m} = \omega^{m}$.

4.2 冪関数 (power function) z^α

- (b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

(4a)
$$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

とすると
$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし
$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

---

[1] 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})\ kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

4.2 冪関数 (power function) z^α

ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

$$\text{(4a)} \qquad \alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

とすると

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

n が $\mathbb{Z}$ を動くとき、nq を p で割った余りには、0, 1, $\cdots$, $p-1$ すべて現れる[1]。

---

[1] 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})\ kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

4.2 冪関数 (power function) z^α

(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

(4a) $$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

とすると

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

n が $\mathbb{Z}$ を動くとき、nq を p で割った余りには、0, 1, $\cdots$, $p-1$ すべて現れる[1]。ゆえに

$$\omega^{nq} = 1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{p-1},$$

(4b) $$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, p-1).$$

---

[1] 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})\ kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

4.2 冪関数 (power function) z^α

ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

(4a) $$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

とすると

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

n が $\mathbb{Z}$ を動くとき、nq を p で割った余りには、0, 1, $\cdots$, $p-1$ すべて現れる[1]。ゆえに

$$\omega^{nq} = 1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{p-1},$$

(4b) $$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, p-1).$$

これは円周 $|z| = r^\alpha$ の p 等分点である。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ のときは、z の p 乗根全体である。

---

[1] 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})\ kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

4.2 冪関数 (power function) z^α

(c) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (つまり α は無理数) のとき、$p(z, \alpha)$ は無限個の値を持つ (証明はサボる。用途があまりなさそうなので。コンピューターで計算して納得できる…かも)。 □

4.2 冪関数 (power function) z^α

ⓒ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (つまり α は無理数) のとき、$p(z, \alpha)$ は無限個の値を持つ (証明はサボる。用途があまりなさそうなので。コンピューターで計算して納得できる⋯かも)。 □

まとめると (無限多価 の log を用いて $p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z}$ とすると)

ⓐ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$p(z, \alpha) = z^\alpha$ (普通の冪). 1 価関数である。

ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha = \dfrac{q}{p}$ (既約分数, $p \in \mathbb{N}$) のとき、$p(z, \alpha)$ は p 価関数である。

ⓒ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき、$p(z, \alpha)$ は無限多価関数である。

4.2 冪関数 (power function) z^α

ⓒ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (つまり α は無理数) のとき、$p(z,\alpha)$ は無限個の値を持つ (証明はサボる。用途があまりなさそうなので。コンピューターで計算して納得できる…かも)。 □

まとめると (無限多価 の log を用いて $p(z,\alpha) := e^{\alpha \log z}$ とすると)

ⓐ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$p(z,\alpha) = z^\alpha$ (普通の冪). 1 価関数である。

ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha = \dfrac{q}{p}$ (既約分数, $p \in \mathbb{N}$) のとき、$p(z,\alpha)$ は p 価関数である。

ⓒ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき、$p(z,\alpha)$ は無限多価関数である。

もちろん、いずれの場合も、$p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z}$ の log の分枝を選ぶことで、1 価関数になる (分枝が選べる)。

今後は $p(z,\alpha)$ を z^α と書く。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ ($p \in \mathbb{N}$) のとき $\sqrt[p]{z}$ と書くことがある。多価関数と考えるのか、分枝を選んで一価関数と考えるかは case by case である。

4.2 冪関数 (power function) z^α

例 15.1 ($\sqrt{-1}$ は何か？)

(無限多価 の log を用いて $\sqrt{z} = p(z, 1/2) := e^{\frac{1}{2}\log z}$ とする場合)

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$ であるから

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法) $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = -1$ とすると、$z = 1 \cdot e^{\pi i}$, $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$ であるから

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\cdot\pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

4.2 冪関数 (power function) z^α

1 つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

4.2 冪関数 (power function) z^α

1 つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

例 15.2 (i の i 乗)

多分応用はないと思うが、i^i を求めてみよう。i の極形式は $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i = \log |1| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b = e^{b \log a}$ によって)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

4.2 冪関数 (power function) z^α　おまけ

$p(z,\alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

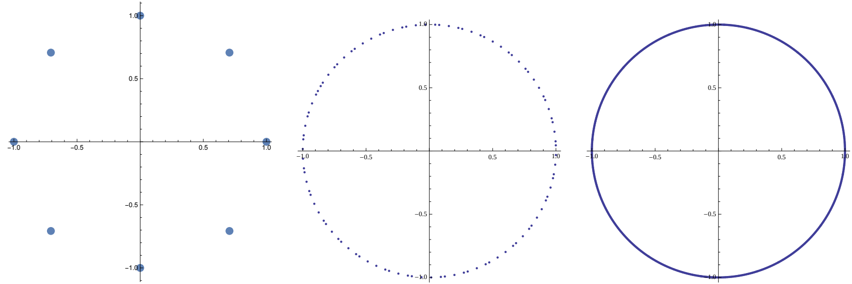

図 1: $p(1,1/8)$, $p(1,\sqrt{2})$ (100 個), $p(1,\sqrt{2})$ (1000 個)

4.3 初等関数ワールド

　三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

4.3 初等関数ワールド

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned} \sin z = w \Leftrightarrow \quad & \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ \Leftrightarrow \quad & \text{途中省略} \\ \Leftrightarrow \quad & z = -i \log \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right) \end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

4.3 初等関数ワールド

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned} \sin z = w \Leftrightarrow &\quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ \Leftrightarrow &\quad \text{途中省略} \\ \Leftrightarrow &\quad z = -i \log\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right) \end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

4.3 初等関数ワールド　おまけ

一通り書いておこう。

$$\arcsin z = \sin^{-1} z := -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\arccos z = \cos^{-1} z := i \log\left(z - i\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{\pi}{2} + i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2}\left(\log(1-iz) - \log(1+iz)\right),$$

$$\mathrm{arcsinh}\, z = \sinh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\mathrm{arccosh}\, z = \cosh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{arctahn}\, z = \tanh^{-1} z := \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

問　次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$(\mathrm{arcsinh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad (\mathrm{arccosh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad (\mathrm{arctahn}\, z)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

問　次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

5 線積分　5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

5 線積分　5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 15.3 (線積分)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$C : z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$f\colon C^* \to \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$. このとき

$$\int_C f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)\, dt \tag{5}$$

とおき、f の曲線 C に沿う**線積分**と呼ぶ。

また

$$\int_C f(z)\, |dz| := \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) |\varphi'(t)|\, dt \tag{6}$$

と定める。

5.1 線積分の定義

5.1 線積分の定義

例 15.4

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。

5.1 線積分の定義

例 15.4

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi e^{3i\theta}\,d\theta$$

$$= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

5.1 線積分の定義

例 15.4

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\, dz = \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\ d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta}\ d\theta$$
$$= i \left[\frac{e^{3i\theta}}{3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} \left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0} \right) = \frac{(-1) - 1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

例 15.5

$f(z) = \dfrac{1}{z}$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ のとき。

5.1 線積分の定義

例 15.4

$f(z)=z^2$, $C\colon z=\varphi(\theta)=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ のとき。$\varphi'(\theta)=ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^{\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta=\int_0^{\pi}(e^{i\theta})^2\cdot ie^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}\,d\theta$$

$$=i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\left(e^{3i\pi}-e^{3\cdot 0}\right)=\frac{(-1)-1}{3}=-\frac{2}{3}.$$

例 15.5

$f(z)=\dfrac{1}{z}$, $C\colon z=\varphi(\theta)=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ のとき。$\varphi'(\theta)=ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=2\pi i.$$

5 線積分　5.1 線積分の定義

注意事項

5 線積分　5.1 線積分の定義

注意事項

1. 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

5 線積分　5.1 線積分の定義

注意事項

1. 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。
2. φ は区分的に C^1 級であるから

   $(\exists\{t_j\}_{j=0}^m)\quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta \land$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級.

   t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

   $$\int_C f(z)\,dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$$

   とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

5.1 線積分の定義

③ $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt \tag{7}$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \tag{8}$$

が成り立つ。

5.1 線積分の定義

3. $F(t):=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$(7)\qquad \int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt$$

のように定義しても良い (ただし $U(t):=\mathrm{Re}\,F(t)$, $V(t):=\mathrm{Im}\,F(t)$)。

$\alpha<\beta$ であれば

$$(8)\qquad \left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left|\sum_j F(t_j)\Delta t_j\right| \le \sum_j |F(t_j)|\,\Delta t_j$$

から証明出来る。(7) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

4. (とても良く使う。)

(9)
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

5.1 線積分の定義

④ (とても良く使う。)

(9) $$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$

と書き換えられるが、これは (8) によって確かに成立する。

5.1 線積分の定義

④ (とても良く使う。)

(9) $$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$

と書き換えられるが、これは (8) によって確かに成立する。

　大抵は、この後

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in C^*}|f(z)|\int_C |dz| = \max_{z\in C^*}|f(z)|\times(C\text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注　$C^* = C$ の跡 $= \varphi$ の値域 $= \mathrm{Image}\,\varphi = \{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ である。

注　定義より $\displaystyle\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$ であるから、これは C の弧長である。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf` (2014〜).