

複素関数・同演習 第13回

～冪級数(6) 収束円周上での収束発散, 対数関数と冪関数～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021年11月9日

目次

1 本日の内容・連絡事項

2 冪級数 (続き)

- 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)
 - Abel の級数変形法
 - Abel の連続性定理

3 対数関数と冪関数

- 複素対数関数
 - Log の Taylor 展開
 - $e^w = z$ を解く

4 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 前回のスライド 20、うまく説明できなかつたので (動画修正するつもりでできませんでした)、補足します。
- Abel の級数変形法を使う定理の 2 つ目、Abel の連続性定理を紹介し
ます。
これで長く続いた冪級数も一段落。「対数関数と冪関数」(講義ノート [1] の §4) に入ります。
- 宿題 6 の解説をします。
注: 宿題の解説が長くなっています (今後もその傾向が強くなる)。その分講義のパートはなるべく短くするように努めます。
- 宿題 7 を出します (締め切りは 11 月 16 日 13:30)。
- 「複素関数の出欠について」 というのを書きました。随時更新します。
- 授業配信 Zoom の URL を更新しました。シラバスの補足に書いてあります。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

3.5.1 Abel の級数変形法 (続き) スライド 20 説明補足

定理 12.8 の証明 $s_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ ($n \geq 0$) とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n s_k \beta_k - \sum_{k=1}^n s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\ &= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\ &= s_0 (\beta_0 - \beta_1) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n \quad (\text{赤と水色それぞれまとめる}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n. \quad (\text{赤と水色 } \sum_{k=1}^{n-1} \text{ を 1 つの } \sum_{k=0}^{n-1} \text{ にまとめる}) \end{aligned}$$

(後略)

3.5.1 Abel の級数変形法 部分積分との対応の説明

階差 (差分) を微分に、和を積分に対応させるとき、Abel の級数変形法

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k = s_n \beta_n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_{k+1} - \beta_k) \quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差: } \alpha_k = s_k - s_{k-1})$$

は、部分積分 (integral by parts)

$$\int_a^b F'(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx$$

に相当する。つまり、Abel の級数変形法は部分積分の離散バージョンである。

微積分の基本定理

① $f(x) = F'(x)$ ならば $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

② $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ならば $F'(x) = f(x)$.

の離散バージョンは

① $b_n = a_{n+1} - a_n$ ならば $\sum_{k=1}^n b_k = a_{n+1} - a_1$. ($a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を見慣れてる?)

② $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ならば $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, $s_1 = a_1$.

3.5.2 Abel の連続性定理

次の定理も、やはり Abel の級数変形法で証明出来る。

定理 13.1 (Abel の連続性定理)

冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ ($R > 0$) で収束したとする。このとき、任意の $K > 1$ に対して

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K \right\}$$

とおくと、冪級数 $f(z)$ は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。

従って関数 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。特に

$$\lim_{\substack{z \in \Omega_K \\ z \rightarrow R}} f(z) = f(R) \quad (\text{さらに特に } \lim_{\substack{x \in [0, R) \\ x \rightarrow R}} f(x) = f(R)).$$

3.5.2 Abel の連続性定理

(この辺をきちんと説明するには、長い時間が必要になります。この講義の以下の議論にそれほど影響はないので、駆け足で通り抜けます。)

証明の方針

$$\alpha_n := a_n R^n, \quad \beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k,$$

とにおいて Abel の級数変形法を用いる。詳細は講義ノート pp. 81–82 を見よ。



(説明補足) 定理 12.8 では、 $\beta_n \downarrow 0$ という条件を仮定したが、 $\{\beta_n\}$ は有界変分 (def. $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$) という条件で置き換えても良いことはすぐ分かる。それに気づくと、納得しやすい (かもしれない)。

Ω_K についても、形を見て (次のスライド) 納得するにとどめたい。

3.5.2 Abel の連続性定理 Ω_K の形

Mathematica で $R=1$; `Manipulate[RegionPlot[$x^2+y^2 < R^2 \&\& \text{Abs}[1-(x+I y)/R]/(1-\text{Abs}[x+I y]/R) \leq K, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{K, 1, 10, 0.1\}$] とする。`

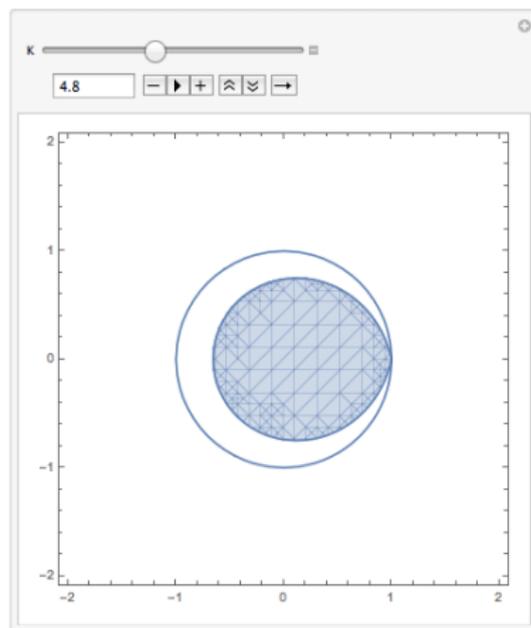


図 1: $R = 1, K = 4.8$ の場合の Ω_K と円周 $|z| = R$

3.5.2 Abel の連続性定理 Stolz の路

多くのテキストで、Abel の連続性定理は、次の形で与えられている。

任意の $\alpha \in (0, \pi/2)$ に対して、

$$\lim_{\substack{z \rightarrow R \\ |\arg(z-R) - \pi| < \alpha}} f(z) = f(R)$$

「 $|\arg(z-R) - \pi| < \alpha$ を満たすようにして $z \rightarrow R$ とすると」という近づけ方を「**Stolz の路に沿って** z を R に近づけると」と言う。

z が扇形 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-R| < R \cos \alpha, |\arg(z-R) - \pi| < \alpha\}$ に属するとき

$$\frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} = \frac{|R - z|}{R - |z|} < 2 \sec \alpha \quad (\text{念のため: } \sec = \frac{1}{\cos})$$

が成り立つので (証明略, 辻・小松 [2] の p. 91)、 $K := 2 \sec \alpha$ について $z \in \Omega_K$ である。ゆえに、上の形の Abel の連続性定理は、定理 13.1 の系として導かれる。

例 13.2 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

$$(1) \quad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1)$$

とおく。収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0; 1)$ で正則である。 $f(z)$ は、 $z = 1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in [0, 1)}} f(x).$$

$f(z)$ が、 $z = x \in (-1, 1)$ のとき実関数の $\tan^{-1} x$ と一致することは証明しやすい (ここでは認めることにする)。 $\tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。ゆえに

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

以上の論法は便利である (この論法を使わずに $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ の証明が出来ないわけではないが、少し手間がかかる。Abel の連続性定理を使うと簡単である。)

3.5.2 Abel の連続性定理 むすび

冪級数は等比級数に似ていて、収束円内部での収束証明は等比級数と比較する(具体的には優級数の定理や Weierstrass M-test を用いる)ことで証明できる。

しかし収束円周上の点での収束については、その方法では証明できない。Abel の級数変形法を用いた精密な議論が有効である。

余談: Abel とはどういう人

昔は、Abel は「5 次方程式は冪根で解けない」ことを証明した人で、若くしてなくなった天才である、ということ、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、冪級数の収束発散についての基礎を確立した(それがこの節の重要な内容だった)。それ以外に

- ① α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
- ② 5 次以上の代数方程式は有限回の四則と冪根では解けないことの証明
- ③ 楕円関数論

などの仕事を行った。後の二つは、数学読み物にも良く出て来る偉大な仕事である。(偉大な数学者は、彼らの名前を有名にした大きな業績以外に、基礎的なことへの貢献も大きいことが多い、とつねづね感じている。冪級数の理論への貢献をした Abel も例外でない。) □

4 対数関数と冪関数 4.1 複素対数関数

4 節の短い予告 複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α を定義して色々やる。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

$\text{Log } z$ は $z = 0$ では定義されない。そこで多くの本で、 $\text{Log}(z + 1)$ の 0 の周りの冪級数展開を求めている。

$$\text{Log}(z + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1).$$

これは本質的には、 $\text{Log } z$ を 1 のまわりで冪級数展開した

$$\text{Log } z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1)$$

と同値である。

この事情は、冪関数 z^α についてもほぼ同様である。

$$(z + 1)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1),$$

$$z^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1).$$

4 対数関数と冪関数 4.1 複素対数関数

対数関数 \log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 \log (実質的に高校数学) の復習

$f: \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0, +\infty)$.

$\tilde{f}: \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ と表す。

$x \in \mathbb{R}, y \in (0, +\infty)$ について、 $y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

一方、複素指数関数 $f: \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ については

- 全射ではない ($e^z \neq 0$ つまり $f(z) = 0$ を満たす z は存在しない)。
- 単射でもない ($e^{z+2\pi i} = e^z$ を満たすので周期関数であり、無限回同じ値を取る)。

4.1.1 Log の Taylor 展開

4.1.2 $e^w = z$ を解く

定理 13.3 (方程式 $e^w = z$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、 w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。
その解は、 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) とするとき

$$(2) \quad w = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

これは $w = \log |z| + i \arg z$ とも書ける。

証明 $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと $e^w = e^u e^{iv}$.

$$e^w = z \Leftrightarrow e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r = e^u \quad \text{かつ} \quad e^{iv} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow u = \log r \quad \text{かつ} \quad (\exists n \in \mathbb{Z}) v = \theta + 2n\pi$$

$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) w = \log r + i(\theta + 2n\pi). \quad \square$$

繰り返しになるが \Leftrightarrow の \Leftarrow は明らか。 \Rightarrow については、 $e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ の両辺の絶対値を取って

$$e^u = \left| e^u e^{iv} \right| = \left| re^{i\theta} \right| = r (\neq 0).$$

それで $e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ を割って $e^{iv} = e^{i\theta}$.

□

4.1.2 $e^w = z$ を解く 例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.4 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n + 1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n + 1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

$e^w = i = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$ の解は $w = (2n + 1/2)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

$e^w = -2i = 2 \cdot e^{-i \frac{\pi}{2}}$ の解は $w = \log 2 + (2n - 1/2)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$).

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).
- [2] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、ゆうじょうぼうずいまん 祐乗坊 瑞満、水本久夫。