複素関数・同演習 第12回

～冪級数 (5) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月27日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. 冪級数 (続き)
   - 冪級数の項別微分 (続き)
     - 微分を使わない Taylor 展開
     - 微分方程式の冪級数解法
     - 微分方程式の冪級数解法
   - 冪級数による初等関数の定義
   - 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)
3. 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 冪級数の 5 回目。有理関数の Taylor 展開、微分方程式の冪級数解法、冪級数による初等関数の定義、収束円周上での収束発散など収穫の多い回。(講義ノート [1] の §3.3, 3.4, 3.5)。
- 宿題 6 を出してあります (締め切りは 11 月 9 日 13:30)。

例 12.1 (有理関数の Taylor 展開)

次の関数を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$f(z)=\frac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}.$$

分子 ÷ 分母の計算をしよう。

$$f(z)=\frac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}=\frac{(z+2)(z^2-5z+6)+3z-7}{z^2-5z+6}=z+2+\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z)$, $q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)}=\frac{A(z)}{p(z)}+\frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z)$, $B(z)$ が存在する。$\deg r(z)<\deg(p(z)q(z))$ であれば、$\deg A(z)<\deg p(z)$, $\deg B(z)<\deg q(z)$ を満たす $A(z)$, $B(z)$ が存在する。

$A=1$, $B=2$ と求まる。ゆえに

$$f(z)=z+2+\frac{1}{z-2}+\frac{2}{z-3}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

　等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad(\text{収束}\Leftrightarrow |z|<2),\qquad \frac{1}{z-3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad(\text{収束}\Leftrightarrow |z|<3)$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(z)&=z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\\
&=z+2-\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)-2\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)\\
&=\frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n\quad(\text{少なくとも } |z|<2 \text{ で収束}).
\end{aligned}$$

　収束半径は 2 である。これは $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{2}{3^{n+2}}}=2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることからも分かる (「収束半径が ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$ の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する)。 □

以上より、**有理関数は、部分分数分解が求まれば、容易に冪級数展開できることが分かる。**

上の例では、最後に $n=0,1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

「c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z)=z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$$

の形のままでは、a_n が何か、すぐには分からない。

$$f(z)=\frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n$$

と整理してあれば一目瞭然である。つまり

$$a_0=\frac{5}{6},\quad a_1=\frac{19}{36},\quad a_n=-\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)\quad(n\ge 2).\qquad\square$$

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ で、

$$f''(z)=-f(z),\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0$$

を満たすものを求めよ。
(解答)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$
$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$$

であるから

$$\begin{aligned} f''=-f &\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\ge 0})\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}=-a_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\ge 0})\quad a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

この冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、収束円は $\mathbb{C}$ である。すなわち f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。
(もちろん $f(z) = \cos z$ である。) □

3.3.4 微分方程式の冪級数解法

注意 12.3 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 (**特殊関数**) が導入出来る。

特異点を持つ場合も解くことが出来て、応用上も重要な特殊関数が得られる。

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\,y'-\alpha\beta y=0 \quad (\textbf{Gauss の超幾何微分方程式}).$$

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\alpha^2\right)y=0 \quad (\textbf{Bessel の微分方程式}).$$

おまけ

例 12.4 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

つまり微分して、z をかけることで、一般項に n をかけることが出来る。

例 12.4 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ の和が求まることが分かる。 □

3.4 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

例えば

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (\text{これは再定義となる}\cdots),$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

これらの冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、関数は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

3.4 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

1. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
   $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
3. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
   (これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)
4. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
5. 正の実数 π が存在して、$\cdots$(よく知っている性質を持つ)

(1) は冪級数の項別微分定理により簡単に証明できる。(2) についてはこの後すぐに説明する。(3) は簡単な練習問題、(3) から (4) はすぐ導ける。(5) をノーヒントで解くのは難しいかもしれない (例えば高橋 [2] を見よ)。

(2) の証明を二通り示す。

証明 1　「$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1)\qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。これから

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}.\qquad\square$$

(1) が成り立つことを認めれば簡単である。それを保証する定理は重要であり、ぜひ覚えるべきであるが、証明は少し手間がかかるので、ここでは説明しない。

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、$f(z)=e^z$ は $f'(z)=f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right)&=f'(z)\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(-1)f'(c-z)\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0\quad(z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z)=f(0)f(c)=1\cdot f(c)=f(c).$$

すなわち

$$(\forall c\in\mathbb{Z})(\forall z\in\mathbb{Z})\quad f(z)f(c-z)=f(c).$$

任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して $c:=a+b$, $z:=a$ とおくと、$f(z)f(c-z)=f(c)$ は $f(a)f(b)=f(a+b)$. すなわち $e^ae^b=e^{a+b}$. □

3.4 冪級数による初等関数の定義: exp, cos, sin, cosh, sinh

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、$D(0;1)$ では正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z|<1),$$

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z|<1),$$

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^k \quad (|z|<1).$$

ただし α は任意の複素数で、$\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

実はきれいな解答があり、次節で (次回に) 紹介する。こうご期待。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c;\rho)$ の境界 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|=\rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 12.5 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z|<1$」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z|\ge 1$」. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z|=1$ の任意の点で発散する。

例 12.6 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0;1)$ の周 $|z|=1$ 上の点では、

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$b_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \le b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので、優級数の定理から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は収束する。(Weierstrass M-test によると、閉円盤 $\overline{D}(0;1)$ で一様絶対収束する。)

例 12.7 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

収束円の周 $|z|=1$ 上の点では、収束する・発散する、どちらのケースもある。次の 2 つは知っている (はず)。

- $z=1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ (発散).
- $z=-1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$ は収束する。
  (「絶対値が 0 に収束する交代級数は収束する」。実は和は $-\log 2$.)

実は、$|z|=1$, $z\neq 1$ を満たす任意の z に対して、この冪級数は収束する。それは次に紹介する Abel の定理を用いればよい。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

定理 12.8 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ は収束する。

例 12.7 (つづき)

$|z|=1$, $z\neq 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 12.8 の条件をチェックしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ は確かに成り立つ。

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}z^n\right| = \left|z\frac{1-z^N}{1-z}\right| \leq |z|\frac{1+|z^N|}{|1-z|} \leq \frac{1\cdot(1+1)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、部分和は有界である。

ゆえに Abel の定理 (定理 12.8) が適用できて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ は収束する。

証明 $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおくとき、仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n)$ $|s_n| \leq M$.

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\
&= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\
&= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\
&= s_0 (\beta_0 - \beta_1) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n \quad \text{(動画のスライドに書き加え)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n .
\end{aligned}$$

(上の式変形を **Abel の級数変形法**と呼ぶ。微分可能な関数についての部分積分に相当する。)

(再掲)
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.$$

右辺第 2 項について、$|s_n \beta_n| \le M\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$.

右辺第 1 項の級数については、
$$|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \le M\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right),$$
$$\sum_{k=0}^{n} M(\beta_k - \beta_{k+1}) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0$$
であるから、優級数の定理より $n \to \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] 高橋礼司：複素解析，東京大学出版会 (1990)，最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる.

[3] 神保道夫（じんぼう）：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.