

複素関数・同演習 第12回

～冪級数(5)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021年10月27日

目次

1 本日の内容・連絡事項

2 冪級数 (続き)

- 冪級数の項別微分 (続き)
 - 微分を使わない Taylor 展開
 - 微分方程式の冪級数解法
 - 微分方程式の冪級数解法
- 冪級数による初等関数の定義
- 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

3 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 冪級数の 5 回目。有理関数の Taylor 展開、微分方程式の冪級数解法、冪級数による初等関数の定義、収束円周上での収束発散など収穫の多い回。(講義ノート [1] の §3.3, 3.4, 3.5)。
- 宿題 6 を出しております (締め切りは 11 月 9 日 13:30)。

例 12.1 (有理関数の Taylor 展開)

次の関数を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の Taylor 展開

例 12.1 (有理関数の Taylor 展開)

次の関数を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

分子 ÷ 分母の計算をしよう。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の Taylor 展開

例 12.1 (有理関数の Taylor 展開)

次の関数を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

分子 ÷ 分母の計算をしよう。

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6} = \frac{(z + 2)(z^2 - 5z + 6) + 3z - 7}{z^2 - 5z + 6} = z + 2 + \frac{3z - 7}{(z - 2)(z - 3)}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z), q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z), B(z)$ が存在する。 $\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、 $\deg A(z) < \deg p(z), \deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z), B(z)$ が存在する。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z), q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z), B(z)$ が存在する。 $\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、 $\deg A(z) < \deg p(z), \deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z), B(z)$ が存在する。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z-7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z), q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z), B(z)$ が存在する。 $\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、 $\deg A(z) < \deg p(z), \deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z), B(z)$ が存在する。

$A=1, B=2$ と求まる。ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$f(z) = z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n \quad (\text{少なくとも } |z| < 2 \text{ で収束}). \end{aligned}$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n \quad (\text{少なくとも } |z| < 2 \text{ で収束}). \end{aligned}$$

収束半径は 2 である。これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+2}}} = 2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることから分かる (「収束半径が ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する)。

□

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n \quad (\text{少なくとも } |z| < 2 \text{ で収束}). \end{aligned}$$

収束半径は 2 である。これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+2}}} = 2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることから分かる (「収束半径が ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する)。

以上より、**有理関数は、部分分数分解が求まれば、容易に冪級数展開できることが分かる。**

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出した。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか?」と時々質問されるので、説明しておく。

「 c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、 a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか?」と時々質問されるので、説明しておく。

「 c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、 a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z) = z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

の形のままで、 a_n が何か、すぐには分からない。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開 (続き) 有理関数の冪級数展開

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出した。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

「 c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、 a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z) = z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

の形のままで、 a_n が何か、すぐには分からない。

$$f(z) = \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) z^n$$

と整理してあれば一目瞭然である。つまり

$$a_0 = \frac{5}{6}, \quad a_1 = \frac{19}{36}, \quad a_n = - \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) \quad (n \geq 2). \quad \square$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。

(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$f'' = -f$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。

(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$f'' = -f$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。

(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$f'' = -f \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (微分方程式の冪級数解法)

収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

を満たすものを求めよ。

(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

であるから

$$\begin{aligned} f'' = -f &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

3.3.3 微分方程式の冪級数解法

例 12.2 (つづき)

初期条件から

$$1 = f(0) = a_0, \quad 0 = f'(0) = a_1.$$

これから

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

この冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、収束円は \mathbb{C} である。すなわち f は \mathbb{C} 全体で正則である。

(もちろん $f(z) = \cos z$ である。)

□

3.3.4 微分方程式の冪級数解法

注意 12.3 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

3.3.4 微分方程式の冪級数解法

注意 12.3 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 (**特殊関数**) が導入出来る。

3.3.4 微分方程式の冪級数解法

注意 12.3 (非常に広い発展がある)

上の例の微分方程式は、入門講義で良く知られているもので、「わざわざ解き直した」と言えなくもない。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 (**特殊関数**) が導入出来る。

特異点を持つ場合も解くことが出来て、応用上も重要な特殊関数が得られる。

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (\text{Gauss の超幾何微分方程式}).$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (\text{Bessel の微分方程式}).$$

例 12.4 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

例 12.4 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

例 12.4 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

例 12.4 (a_n が n の多項式の場合の冪級数の和)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

つまり微分して、 z をかけることで、一般項に n をかけることが出来る。

例 12.4 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

例 12.4 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}.$$

例 12.4 (つづき)

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}.$$

結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ の和が求まることが分かる。 □

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

例えば

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (\text{これは再定義となる}\cdots),$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

これらの冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、関数は \mathbb{C} 全体で正則である。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

$$\textcircled{2} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

$$\textcircled{2} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\textcircled{3} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

$$\textcircled{2} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\textcircled{3} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

$$\textcircled{4} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

$$\textcircled{2} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\textcircled{3} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

$$\textcircled{4} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$\textcircled{5}$ 正の実数 π が存在して、 \dots (よく知っている性質を持つ)

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、 π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

$$\textcircled{1} \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \\ (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

$$\textcircled{2} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\textcircled{3} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

$$\textcircled{4} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$\textcircled{5}$ 正の実数 π が存在して、 \dots (よく知っている性質を持つ)

(1) は冪級数の項別微分定理により簡単に証明できる。(2) についてはこの後すぐに説明する。(3) は簡単な練習問題、(3) から (4) はすぐ導ける。(5) をノーヒントで解くのは難しいかもしれない (例えば高橋 [2] を見よ)。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

(2) の証明を二通り示す。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

(2) の証明を二通り示す。

証明 1 「 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

(2) の証明を二通り示す。

証明 1 「 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。これから

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}. \quad \square \end{aligned}$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

(2) の証明を二通り示す。

証明 1 「 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$(1) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

が成り立つ」という定理が成り立つ (講義ノート付録 A.4 (2021/10/27 現在、命題 A.23 (Mertens の定理)))。これから

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}. \quad \square \end{aligned}$$

(1) が成り立つことを認めれば簡単である。それを保証する定理は重要であり、ぜひ覚えるべきであるが、証明は少し手間がかかるので、ここでは説明しない。

3.4 冪級数による初等関数の定義: \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{d}{dz} (f(z)f(c-z)) =$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{d}{dz} (f(z)f(c-z)) = f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z)$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} (f(z)f(c-z)) &= f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} (f(z)f(c-z)) &= f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c).$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} (f(z)f(c-z)) &= f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c).$$

すなわち

$$(\forall c \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z}) \quad f(z)f(c-z) = f(c).$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

証明 2 (神保 [3]) 冪級数の項別微分定理により、 $f(z) = e^z$ は $f'(z) = f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(f(z)f(c-z)) &= f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c).$$

すなわち

$$(\forall c \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z}) \quad f(z)f(c-z) = f(c).$$

任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $c := a + b, z := a$ とおくと、

$$f(z)f(c-z) = f(c) \text{ は } f(a)f(b) = f(a+b). \text{ すなわち } e^a e^b = e^{a+b}. \quad \square$$

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、 $D(0; 1)$ では正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1),$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1),$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1).$$

ただし α は任意の複素数で、 $\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

3.4 冪級数による初等関数の定義: $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、 $D(0; 1)$ では正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1),$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1),$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1).$$

ただし α は任意の複素数で、 $\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

実はきれいな解答があり、次節で(次回に)紹介する。どうぞ期待。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c; \rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 12.5 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$ 」が分かっている。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c; \rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 12.5 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$ 」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$ 」。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c; \rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 12.5 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$ 」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$ 」。ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0; 1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 12.6 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c; \rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 12.5 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$ 」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$ 」。ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0; 1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 12.6 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0; 1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

冪級数は、その収束円 $D(c; \rho)$ の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか。

例 12.5 (収束円周上の任意の点で発散)

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については「収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$ 」が分かっている。対偶は「発散する $\Leftrightarrow |z| \geq 1$ 」。ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0; 1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。

例 12.6 (収束円周上の任意の点で収束)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。収束円 $D(0; 1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$b_n := \frac{1}{n^2}$ とおくと、 $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので、優級数の定理から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は収束する。(Weierstrass M-test によると、閉円盤 $\overline{D}(0; 1)$ で一様絶対収束する。)

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

例 12.7 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

例 12.7 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

収束円の周 $|z| = 1$ 上の点では、収束する・発散する、どちらのケースもある。次の 2 つは知っている (はず)。

- $z = 1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (発散)。
- $z = -1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ は収束する。
(「絶対値が 0 に収束する交代級数は収束する」。実は和は $-\log 2$.)

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

例 12.7 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在)

冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることはすぐに分かる。

収束円の周 $|z| = 1$ 上の点では、収束する・発散する、どちらのケースもある。次の 2 つは知っている (はず)。

- $z = 1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (発散)。
- $z = -1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ は収束する。
(「絶対値が 0 に収束する交代級数は収束する」。実は和は $-\log 2$.)

実は、 $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす任意の z に対して、この冪級数は収束する。それは次に紹介する Abel の定理を用いればよい。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

定理 12.8 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ は部分和が有界であり、 $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとす
る。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

例 12.7 (つづき)

$|z| = 1, z \neq 1$ とする。 $\alpha_n := z^n, \beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 12.8 の条件をチェッ
クしよう。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

定理 12.8 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ は部分和が有界であり、 $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとす
る。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

例 12.7 (つづき)

$|z| = 1, z \neq 1$ とする。 $\alpha_n := z^n, \beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 12.8 の条件をチェッ
クしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) は確かに成り立つ。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

定理 12.8 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ は部分和が有界であり、 $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとす
る。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

例 12.7 (つづき)

$|z| = 1, z \neq 1$ とする。 $\alpha_n := z^n, \beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 12.8 の条件をチェ
ックしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) は確かに成り立つ。

$$\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \right| = \left| \sum_{n=1}^N z^n \right| = \left| z \frac{1 - z^N}{1 - z} \right| \leq |z| \frac{1 + |z^N|}{|1 - z|} \leq \frac{1 \cdot (1 + 1)}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、部分和は有界である。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

定理 12.8 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)

$\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ は部分和が有界であり、 $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとす
る。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

例 12.7 (つづき)

$|z| = 1, z \neq 1$ とする。 $\alpha_n := z^n, \beta_n := \frac{1}{n}$ とおいて、定理 12.8 の条件をチェッ
クしよう。

$\beta_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) は確かに成り立つ。

$$\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \right| = \left| \sum_{n=1}^N z^n \right| = \left| z \frac{1 - z^N}{1 - z} \right| \leq |z| \frac{1 + |z^N|}{|1 - z|} \leq \frac{1 \cdot (1 + 1)}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、部分和は有界である。

ゆえに Abel の定理 (定理 12.8) が適用できて、 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束する。

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

証明 $s_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ ($n \geq 0$) とおくと、仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して ($\forall n$)

$$|s_n| \leq M.$$

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

証明 $s_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ ($n \geq 0$) とおくと、仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n)$
 $|s_n| \leq M$.

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n s_k \beta_k - \sum_{k=1}^n s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\ &= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\ &= s_0 (\beta_0 - \beta_1) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n \quad (\text{動画のスライドに書き加え}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n. \end{aligned}$$

(上の式変形を **Abel の級数変形法** と呼ぶ。微分可能な関数についての部分積分に相当する。)

3.5 収束円周上での収束発散 (Abel の 2 つの定理)

(再掲)
$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.$$

右辺第 2 項について、 $|s_n \beta_n| \leq M \beta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

右辺第 1 項の級数については、

$$\begin{aligned} |s_k (\beta_k - \beta_{k+1})| &\leq M (\beta_k - \beta_{k+1}), \\ \sum_{k=0}^n M (\beta_k - \beta_{k+1}) &= M \beta_0 - M \beta_{n+1} \rightarrow M \beta_0 \end{aligned}$$

であるから、優級数の定理より $n \rightarrow \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。

ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。 □

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).
- [2] 高橋礼司：複素解析，東京大学出版会 (1990)，最初、筑摩書房から 1979 年に出版された。丸善 eBook では、
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441>
でアクセスできる。
- [3] じんぼう 神保道夫：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook では
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>
でアクセスできる。